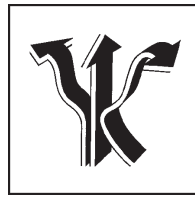


**П. О. ПРИСТАВКА  
О. Г. ЧОЛИШКІНА**

**ПОЛІНОМІАЛЬНІ СПЛАЙНИ  
В ЗАДАЧІ АЛЬТЕРНАТИВНОЇ НАВІГАЦІЇ  
ЗА ДАНИМИ АЕРОЗЙОМКИ**



МІЖРЕГІОНАЛЬНА  
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

П. О. ПРИСТАВКА  
О. Г. ЧОЛИШКІНА

**ПОЛІНОМІАЛЬНІ СПЛАЙНИ  
В ЗАДАЧІ АЛЬТЕРНАТИВНОЇ НАВІГАЦІЇ  
ЗА ДАНИМИ АЕРОЗЙОМКИ**

*Монографія*

Київ  
2022

УДК 517:528.715](02)

П77

Рецензенти: *О. Г. Корченко*, д-р техн. наук, проф.,  
лауреат Державної премії України в галузі науки  
та техніки, заслужений діяч науки та техніки  
України (НАУ)

*С. В. Храпатий*, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
проректор (Міжрегіональна Академія управління  
персоналом)

*А. С. Дуднік*, д-р техн. наук, доц. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом (протокол № 5 від 29.09.21)*

**Приставка П. О., Чолишкіна О. Г.**

П77 Поліноміальні сплайни в задачі альтернативної навігації за даними аерозйомки: монографія. Київ : Міжрегіональна Академія управління персоналом, 2022. 128 с. Бібліогр. : с. 123–126.

ISBN 978-617-02-0369-4

Введено та обґрунтовано модель зображення у вигляді двовимірних локальних поліноміальних сплайнів на основі *B*-сплайнів другого–шостого порядків, що близькі до інтерполяційних у середньому. Подано дослідження та застосування лінійних операторів на основі введеної моделі при обробці цифрових даних аерозйомки на прикладі вирішення задач навігації літального апарата на основі оптичного каналу.

Для фахівців з прикладної математики та інженерно-технічних спеціальностей.

**УДК 517:528.715](02)**

© П. О. Приставка, О. Г. Чолишкіна, 2022

© Міжрегіональна Академія управління персоналом, 2022

ISBN 978-617-02-0369-4

# ЗМІСТ

|                                                                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Вступ .....                                                                                                                                  | 5         |
| <b>Розділ 1. Формалізація моделі зображення, як лінійної комбінації <math>B</math>-сплайнів та лінійні оператори на її основі .....</b>      | <b>7</b>  |
| 1.1. Модель зображення на основі лінійної комбінації $B$ -сплайнів, подання явних виглядів двовимірних сплайнів на основі $B$ -сплайнів..... | 7         |
| 1.2. Побудова піраміди зображень за використанням лінійних операторів на основі лінійних комбінацій $B$ -сплайнів .....                      | 15        |
| 1.3. Неперервне масштабування.....                                                                                                           | 22        |
| Висновки .....                                                                                                                               | 25        |
| <b>Розділ 2. Підвищення різкості зображень на основі лінійних операторів.....</b>                                                            | <b>26</b> |
| 2.1. Задача стабілізації цифрових зображень .....                                                                                            | 26        |
| 2.2. Фільтри, що є псевдозворотними до низькочастотних.....                                                                                  | 29        |
| 2.3. Лінійні оператори цифрової стабілізації зображень .....                                                                                 | 36        |
| Висновки .....                                                                                                                               | 45        |
| <b>Розділ 3. Диференціальні інваріанти відносно локальних обертань на основі сплайн-моделі зображення.....</b>                               | <b>46</b> |
| 3.1. Диференціальні інваріанти відносно локальних обертань .....                                                                             | 46        |
| 3.2. Лінійні оператори на основі часткових похідних лінійних комбінацій $B$ -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому .....        | 48        |
| 3.3. Аналіз розподілів диференціальних інваріантів при обробці цифрових зображень.....                                                       | 53        |
| 3.3.1. Аналіз розподілів інваріантів, обрахованих після застосування оператора $\Delta(p^{ij})$ .....                                        | 55        |

|                                                                                                        |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.2. Аналіз розподілів інваріантів, обрахованих<br>для вихідного цифрового зображення .....          | 65        |
| 3.4. Аналіз відсотка збігів місцеположення особливості<br>для еталонного та контрольного об'єктів..... | 74        |
| 3.5. Аналіз дескрипторів особливих точок .....                                                         | 88        |
| Висновки .....                                                                                         | 92        |
| <b>Розділ 4. Математичне та інформаційне забезпечення</b>                                              |           |
| <b>навігації за оптичним каналом.....</b>                                                              | <b>94</b> |
| 4.1. Попередні зазначення та припущення.....                                                           | 94        |
| 4.2. Відбір особливих точок для позиціювання<br>літального апарату .....                               | 96        |
| 4.3. Попереднє визначення координат<br>літального апарату .....                                        | 97        |
| 4.4. Перевірка достовірності визначеної позиції<br>літального апарату .....                            | 100       |
| 4.5. Логування переміщення повітряного судна на основі<br>даних аерозйомки .....                       | 102       |
| 4.6. Імітаційна апробація технології навігації<br>літального апарата за оптичним каналом .....         | 108       |
| 4.6.1. Методика проведення імітаційної апробації .....                                                 | 108       |
| 4.6.2. Опис програмного забезпечення<br>для проведення імітаційної апробації .....                     | 115       |
| 4.6.3. Результати імітаційної апробації .....                                                          | 119       |
| Висновки .....                                                                                         | 121       |
| Література .....                                                                                       | 123       |

## ВСТУП

У монографії наведено результати розробки нових методів і алгоритмів альтернативної навігації за оптичним каналом, шляхом розпізнавання місцевості та визначення координат у режимі реального часу винятково за даними з камер цільового навантаження літального апарата (ЛА), призначеного для повітряного спостереження та збору інформації, а також їх реалізацію у вигляді програмно-апаратних засобів.

Припускається, що місцеположення ЛА може бути визначене з прийнятною точністю, якщо в області бачення камер цільового навантаження потрапило один та більше об'єктів місцевості, для яких заздалегідь відомо їх місцеположення. В основі сучасних ефективних методів розпізнавання об'єктів, інваріантних відносно обертань та зміни масштабу, покладено аналіз часткових похідних зображення 1-го та 2-го порядку, з метою визначення та опису особливих точок об'єктів пошуку. В цій частині теоретичне обґрунтування проводиться виходячи з моделі зображення на основі двовимірних поліноміальних сплайнів на основі  $B$ -сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому (розділ 1).

Пошук та розпізнавання об'єктів на основі визначення особливих точок на цифрових фото — відомий та поширений у наші дні підхід до обробки даних, що становлять повітряні та космічні знімки. Застереженням при використанні відомих методів при розробці відповідного програмного забезпечення для бортового апаратного комплексу ЛА є відносна обчислювальна складність стандартних алгоритмів, що ускладнює обробку в режимі реального часу та, з іншого боку, запатентованість самих методів пошуку (зокрема методу SIFT та його модифікацій). Проте реальним і за терміном виконання, і за вимогою до наукової новизни, є підхід до пошуку особливих точок об'єктів на основі диференціальних інваріантів на основі часткових похідних, виходячи з авторської моделі зобра-

жень у вигляді двовимірної лінійної комбінації *B*-сплайнів (розділ 3).

Вихідним положенням для виконання досліджень є припущення, що до початку виконання ЛА польотного завдання за навігаційним оптичним каналом, існує доступ до цифрової карти місцевості (або фотоплану) з актуальною інформацією про зону проведення польотів. На основі передпольотної обробки такої карти створюється перелік особливих точок об'єктів-орієнтирів з відповідною геоприв'язкою та завантажуються на носій інформації бортового комплексу ЛА. Під час проведення польоту, на основі аналізу цифрових даних із камер цільового навантаження, відбувається пошук та ідентифікація об'єктів-орієнтирів з подальшим визначенням поточних координат ЛА та (за необхідності) коригування траєкторії польоту, шляхом передачі даних на відповідну підсистему управління польотом (розділ 4).

Вартим уваги та окремого дослідження є вирішення супутніх задач, пов'язаних з підготовкою цифрових знімків для безпосереднього використання при навігації за оптичним каналом. Це й задача компенсації завад для отриманих на борту фото даних (розділ 2), і задача накладання цифрового знімка з камер цільового навантаження літального апарата на цифрову карту, і задача оптимізації обчислень при безпосередній обробці матриць растра.

Усі результати досліджень, наведені у цій монографії, одержано відповідно до технічного завдання держбюджетної теми 247-ДБ19 “Розроблення та виготовлення програмно-апаратних засобів цільового навантаження для повітряного спостереження та альтернативної навігації літального апарата”, номер держреєстрації 0119U100553.

## Розділ 1

# ФОРМАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ЗОБРАЖЕННЯ, ЯК ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ *B*-СПЛАЙНІВ ТА ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ НА ЇЇ ОСНОВІ

У розділі наведено формалізацію моделі зображення, як лінійної комбінації *B*-сплайнів та лінійні оператори низькочастотної фільтрації і масштабування на її основі. Сплайн-модель зображення та нерекурсивні низькочастотні фільтри розглянуто в підрозділі 1.1. У підрозділі 1.2 наведено оператори побудови кратномасштабних пірамід зображень. Можливість отримання ЦЗ змасштабованих у довільну, не обов'язково цілу кількість разів та відповідний алгоритм, подано в підрозділі 1.3. У кінці розділу сформульовано висновки.

### 1.1. Модель зображення на основі лінійної комбінації *B*-сплайнів, подання явних виглядів двовимірних сплайнів на основі *B*-сплайнів

За способом реєстрації цифрових зображень (ЦЗ) дані, що його подають, є усередненими значеннями, тож при фіксації аналогового зображення має місце наступне. Приміром площина зображення визначається осями  $T$  та  $Q$ . Крок дискретизації за напрямками  $T$ ,  $Q$  однаковий  $h > 0$  (за замовченням  $h = 1$ ), отже, задано рівномірне розбиття  $\Delta_{hh} : t_i = ih, q_j = jh, i = 0, H-1, j = 0, W-1$ , де  $H$  та  $W$  — лінійні розміри ЦЗ, що фіксується. Нехай  $\phi(t, q)$  — функція імпульсного відклику системи, що реєструє  $p(t, q)$  — функцію інтенсивності освітлення об'єктів просторової сцени (аналогове зображення). Тоді в силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки  $p(t, q)$  та функції відклику буде значення, усереднене в області дискретизації, зокрема:

$$(p * \phi)(ih, jh) = \frac{1}{h^2} \int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} \int_{jh-\frac{h}{2}}^{jh+\frac{h}{2}} p(t, q) \phi(t - ih, q - jh) dt dq = p_{i,j}. \quad (1.1)$$

Тому дискретизовані значення інтенсивності світлового потоку (цифрове зображення) можна подати у вигляді:

$$p_{i,j} = \bar{p}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}, \quad i = 0, H-1, \quad j = 0, W-1, \quad (1.2)$$

де  $\varepsilon_{i,j}$  — випадкова вада. Стосовно вади  $\varepsilon_{i,j}$  можна припускати будь-який розподіл, наприклад Гаусів. Отже, при побудові моделі зображень за даними (1.2) слід застосовувати апроксимації, що враховують і випадкову природу даних, і фізичні властивості систем реєстрації — зокрема, оператори інтерполяційні в середньому або близькі до інтерполяційних у середньому [1].

Традиційно задача моделювання аналогового зображення вирішується так [2; 3]. Якщо дискретизація аналогового зображення проведена растріванням, то ідеальне інтерполяційне відновлення  $p(t, q)$  виконується за допомогою двовимірного фільтра з прямокутною частотною характеристикою, отриманою за допомогою зворотного перетворення Фур'є:

$$w(t, q) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\pi q)}{\pi q}.$$

Продукт фільтрації може бути визначений на основі двовимірної згортки ЦЗ і даної імпульсної характеристики. Після виконання згортки має місце:

$$p(t, q) = \sum_i \sum_j p_{i,j} \frac{\sin(\pi(t-i))}{\pi(t-i)} \cdot \frac{\sin(\pi(q-j))}{\pi(q-j)}.$$

Наведене співвідношення є двовимірним варіантом теореми Котельникова–Найквіста і вказує спосіб точного інтерполяційного відтворення безперервного зображення за відомої послідовності його двовимірних відліків. Тобто для точного відновлення в ролі інтерполюючої функції повинні використовуватися двовимірні функції виду  $\sin(x)/x$ . Наведене твердження є справедливим, якщо двовимірний спектр сигналу є фінітним,

а інтервали дискретизації досить малі. Обґрунтованість зроблених висновків порушується, якщо хоча б одна з цих умов не виконується. Реальні зображення рідко мають спектри із яскраво вираженими граничними частотами. Однією з причин, що призводять до необмеженості спектра, є обмеженість розмірів зображення.

Шляхом вирішення вказаної проблеми може бути побудова моделі ЦЗ на основі базису фінітних функцій, що близькі за властивостями до властивостей аналогового зображення в спектральній області. Наприклад, лінійні комбінації  $B$ -сплайнів [4–8] є обчислювальним засобом обробки послідовностей відліків функцій, якому притаманні ряд цінних властивостей: обчислювальна простота, можливість враховувати локальні “особливості” сигналу, згладжувальні властивості та ін. Тому актуальним може бути розгляд питання про можливість використання згаданих сплайнів на випадок побудови моделі аналогового зображення [1].

У монографії [9] для апроксимації функції  $p(t, q)$  за значеннями типу (1.2) у вузлах розбиття  $\Delta_{h,h}$  подано лінійні комбінації  $B$ -сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Наприклад, сплайн-оператори нульового та першого ступеня уточнення на основі  $B$ -сплайнів 2-го порядку такі:

$$S_{2,0}(p, t, q) = \sum_{i \in Z} \sum_{j \in Z} p_{i,j} B_{2,h}(t - ih) B_{2,h}(q - jh), \quad (1.3)$$

$$S_{2,1}(p, t, q) = \sum_{i \in Z} \sum_{j \in Z} \left( p_{i,j} - \frac{1}{6} (\Delta_i^2 p_{i,j} + \Delta_j^2 p_{i,j}) + \frac{1}{36} \Delta_{ij}^2 p_{i,j} \right) B_{2,h}(t - ih) B_{2,h}(q - jh), \quad (1.4)$$

де (з точністю до аргументу)

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3 + 2t/h)^2 / 8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2 / 4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3 - 2t/h)^2 / 8, & t \in [h/2; 3h/2]; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\Delta_i^2 p_{i,j} = p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j};$$

$$\Delta_j^2 p_{i,j} = p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1};$$

$$\Delta_{ij}^2 p_{i,j} = \Delta_i^2 p_{i,j-1} - 2\Delta_i^2 p_{i,j} + \Delta_i^2 p_{i,j+1} = \Delta_j^2 p_{i-1,j} - 2\Delta_j^2 p_{i,j} + \Delta_j^2 p_{i+1,j}.$$

Обґрунтуванням обрання розглянутих сплайнів як моделі аналогового зображення можуть бути міркування відповідні тим, що викладені в роботі [10] для моделювання аналогових одновимірних сигналів з кінцевою енергією на основі аналогічних одновимірних лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів. Зокрема, виходячи з положення, що базис  $B$ -сплайнів є базисом Риса та з того факту, що фундаментальні сплайни на основі  $B$ -сплайнів [11] прямують до нуля експоненціально швидко при віддаленні від локальної  $(i, j)$ -ої області наближення, прийнятним є використання введених у роботі [9] двовимірних локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому як моделі ЦЗ.

Якщо обрати за модель зображення  $p(t, q)$  сплайни (1.3), (1.4), то така оцінка за певних умов є фактично асимптотично точною. Зокрема, якщо  $p(t, q) \in C^{2,2}$ ,  $|\varepsilon_{i,j}| < \varepsilon$ ,  $i, j \in Z$  і  $\forall \varepsilon > 0$ , то справедлива оцінка [9] така:

$$\begin{aligned} \|p(t, q) - S_{2,0}(p, t, q)\| &\leq \frac{h^2}{6} \|p''_{t^2}(t, q)\| + \frac{h^2}{6} \|p''_{q^2}(t, q)\| + \\ &+ \frac{h^4}{36} \|p^{(4)}_{t^2 q^2}(t, q)\| + \varepsilon \cdot \|p(t, q)\| + o(h^4), \end{aligned} \quad (1.6)$$

для  $\forall p(t, q) \in C^{3,3}$  і  $\forall \varepsilon > 0$  справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \|p(t, q) - S_{2,1}(p, t, q)\| &\leq \frac{h^3}{12\sqrt{3}} \|p'''_{t^3}(t, q)\| + \frac{h^3}{12\sqrt{3}} \|p'''_{q^3}(t, q)\| + \\ &+ \frac{h^6}{432} \|p^{(6)}_{t^3 q^3}(t, q)\| + \varepsilon \cdot \frac{16}{9} \|p(t, q)\| + o(h^6). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Вираз (1.4) надає високоточне наближення, а сам сплайн, що уточнює, та інші аналогічні [9], є операторами близькими до інтерполяційних у середньому в асимптотичному сенсі.