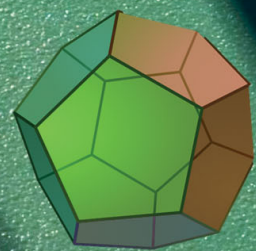




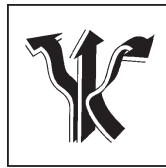
$$B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m)$$

Р. В. Скуратовський

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ КРИПТОГРАФІВ З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ



МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



МАУП

Р. В. Скуратовський

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
ДЛЯ КРИПТОГРАФІВ
З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ**

Підручник

Київ
2026

УДК 51+512.624.95](075.8)
С51

Рецензенти: *Покутний О. О.*, д-р фіз.-мат. наук, провідний наук. співроб. лабораторії крайових задач теорії диференціальних рівнянь Ін-ту математики НАН України
Корченко О. Г., д-р техн. наук, Державний ун-т інформаційно-комунікаційних технологій
Салімов Р. Р., д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб., провідний наук. співроб. відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Ін-ту математики НАН України

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом (протокол № 12 від 26.12.24)

Скуратовський Р. В.

С51 Вища математика для криптографів з прикладами і задачами: підручник. Київ : Міжрегіональна Академія управління персоналом, 2026. 340 с.

ISBN 978-617-02-0416-5

Розглянуто ретельно відібрані і систематизовані теоретичні поняття, теореми, методи і спеціалізовані розділи для розуміння математичного апарату сучасної криптографії, криптографічних протоколів тощо. Наведено практичні навчальні приклади, задачі для самостійного розв'язання, рисунки, схеми. Викладено як теоретичні відомості, так і методи розв'язання основних типів задач із багатьма прикладами. Всі теми супроводжуються варіантами завдань для контрольних і самостійних робіт.

Для криптографів, фахівців з комп'ютерних наук, прикладної математики і системного аналізу.

УДК 51+512.624.95](075.8)

© Р. В. Скуратовський, 2026
© Міжрегіональна Академія управління персоналом, 2026

ISBN 978-617-02-0416-5

ВСТУПНЕ СЛОВО

Сучасна ІТ-освіта вже не можлива без ґрунтовної математичної підготовки. Побудова сучасних алгоритмів шифрування чи класифікації і статистичної обробки даних, а також оцінка їх складності вже не можлива без застосування спеціального математичного апарату, який дає тільки глибоке вивчення вищої математики і прикладних методів цієї науки. Такими знаннями не забезпечують ніякі приватні курси підготовки програмістів, бо математична освіта є концептуальним доменом знань, в якому кожен наступний блок ґрунтується і складається з цілої множини попередніх модулів знань. Саме тому автор підручника пропонує спеціалізований і систематизований матеріал для фахівців з комп'ютерних наук, прикладної математики і системного аналізу.

ЗМІСТ

Вступне слово	3
Передмова	10
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	11
1.1. Вступ	11
1.2. Матриці	12
1.3. Дії над матрицями	16
1.4. Числові характеристики матриць	17
1.4.1. Перестановки	17
1.4.2. Визначник матриці	18
1.4.3. Задачі для самостійного розв'язання	20
1.4.4. Задачі з розв'язками	21
1.4.5. Елементарні перетворення матриці	25
1.4.6. Система лінійних рівнянь і метод Крамера	26
1.4.6.1. Метод Крамера розв'язку системи лінійних рівнянь ...	26
1.4.6.2. Системи з двома рівняннями і двома невідомими	27
1.4.6.3. Системи з трьома рівняннями і трьома невідомими	29
1.4.7. Метод Гаусса-Жордана розв'язку СЛАР	32
1.4.8. Задачі для самостійного розв'язання	33
1.5. Практичне застосування систем лінійних рівнянь	34
1.5.1. Фізика: закони збереження	34
1.5.2. Економіка: лінійні моделі попиту та пропозиції	34
1.5.3. Інженерія: системи лінійних рівнянь у технічних розрахунках	34
1.5.4. Розв'язки практичних задач	35
1.5.5. Застосування лінійних рівнянь у комп'ютерних науках	37
1.6. Числові методи розв'язання систем лінійних рівнянь	37
1.6.1. Числові методи: метод Гаусса та метод Зейделя	37
1.7. Базис векторного простору. Перетворення координат вектора при переході від одного базису до іншого	39
1.7.1. Ранг і базис системи векторів	40
1.8. Квадратичні форми	41
1.8.1. Матричний запис квадратичної форми	43
1.8.2. Приклади квадратичних форм	44
1.8.3. Лінійне перетворення змінних квадратичної форми	45
1.8.3.1. Визначена матриці Гессе	46

1.8.4. Загальний запис лінійної оптимізаційної моделі.	
Цільова функція та система обмежень	47
1.9. Приклади розв'язання задач з лінійної алгебри	48
1.10. Завдання для контрольних і самостійних робіт	55
1.10.1. Завдання для СРС	64
Висновки	66
Контрольні запитання і завдання	66
Розділ 2. ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ	67
2.1. Різні арифметики для комплексних чисел (виду $a + bi$)	67
2.2. Кватерніони	69
2.2.1. Операції над кватерніонами та їх властивості	71
2.2.1.1. Асоціативний закон множення кватерніонів.....	71
2.2.1.2. Спряження кватерніонів	72
2.2.1.3. Ділення в системі кватерніонів	73
2.2.2. Деякі застосування кватерніонів у векторній алгебрі	74
2.2.3. Числова і векторна частини кватерніонів	74
2.2.3.1. Скалярний добуток векторів, які представляють кватерніони.....	75
2.2.3.2. Векторний добуток кватерніонів	76
2.2.3.3. Геометричний зміст множення довільного кватерніона на суто векторний кватерніон	77
2.2.3.4. Представлення довільного повороту в просторі за допомогою кватерніонів	79
2.3. Приклади розв'язування задач	80
Висновки	82
Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ	83
3.1. Аналітична геометрія на площині	83
3.1.1. Прямокутна система координат	83
3.1.2. Полярні координати	85
3.1.3. Рівняння лінії на площині	86
3.1.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	87
3.1.5. Кут між двома прямими	88
3.1.6. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої	89
3.2. Векторні величини	93
3.3. Скалярний добуток і його властивості	94
3.4. Векторний добуток векторів	95

3.4.1. Векторний добуток векторів і його властивості	95
3.4.2. Застосування векторного добутку векторів	97
3.5. Мішаний добуток трьох векторів	98
3.5.1. Визначення мішаного добутку трьох векторів і його властивості	98
3.5.2. Обчислення мішаного добутку через координати векторів	99
3.5.3. Умова компланарності трьох векторів	100
3.5.4. Застосування мішаного добутку векторів	100
3.5.5. Приклади і методи розв'язання задач з аналітичної геометрії	102
3.6. Векторний аналіз	116
3.6.1. Довідковий матеріал та приклади вирішення завдань	119
3.6.2. Запитання до теми аналітична геометрія	123
3.6.3. Задачі до теми векторна алгебра та початки аналітичної геометрії	123
3.6.4. Відповіді до завдань	131
Розділ 4. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ	135
4.1. Вступ до аналізу	135
4.2. Елементи теорії множин	135
4.2.1. Дії над множинами	136
4.2.2. Частково впорядковані множини	137
4.2.3. Поняття відображення або функції	137
4.2.4. Потужність множини	138
4.3. Математична індукція	140
4.4. Дійсні числа	140
4.4.1. Аксиоми додавання і множення	141
4.4.2. Аксиоми порівняння дійсних чисел	141
4.4.3. Аксиома неперервності дійсних чисел	141
4.4.4. Деякі властивості дійсних чисел	142
4.. Контрольні питання і завдання	143
Розділ 5. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ.....	150
5.1. Означення числової послідовності	150
5.2. Арифметичні дії над числовими послідовностями	151
5.3. Обмежені і необмежені числові послідовності	152
5.4. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності	153
5.5. Збіжні послідовності	154
5.6. Властивості збіжних послідовностей	156

5.7. Невизначені вирази	158
5.8. Неперервність функції	159
5.8.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву	159
5.8.2. Найпростіші властивості неперервних функцій	161
Розділ 6. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ	
І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ.....	170
6.1. Частинні та повний прирости функції двох змінних	170
6.2. Диференційованість функції двох змінних	170
6.3. Достатня умова диференційованості функції двох змінних у точці	173
6.4. Диференціювання складної функції	173
6.5. Дотична площина та нормаль	174
6.6. Похідна за напрямом. Градієнт	175
6.7. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків	177
6.8. Похідна неявної функції	179
6.9. Формула Тейлора для функції двох змінних	180
6.10. Поняття визначника Якобі (якобіан)	181
6.11. Матриця Гессе. Гессіан	181
6.12. Ротор, дивергенція	182
6.13. Економічний зміст частинних похідних	183
6.14. Екстремум функції двох змінних	184
6.15. Алгоритм знаходження екстремумів за допомогою матриці Гессе	185
6.16. Економічні задачі	188
6.17. Основні поняття і терміни	190
6.18. Навчальні завдання	191
6.19. Завдання для перевірки знань до теми диференційованість функції двох змінних	193
Розділ 7. МНОЖИННА РЕГРЕСІЯ	197
7.1. Модель множинної регресії	197
7.2. Оцінка параметрів лінійного рівняння множинної регресії	202
7.3. Регресійна модель у стандартизованому масштабі	205
7.4. Частинні рівняння регресії	207
7.5. Практичне застосування. Оцінка регресії в пакеті Excel	217
7.5.1. Оцінка парної регресії в пакеті Excel	217
7.5.2. Оцінка множинної регресії в пакеті Excel	218
7.5.3. Результати оцінки	218

7.5.4. Створення нових змінних в пакеті Excel	219
7.5.5. Оцінка регресії в пакеті Excel	219

Розділ 8. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ДАНИХ І ПРОГНОЗУВАННЯ ЗАСОБАМИ МАШИННОЇ ГРАФІКИ

8.1. Ділова графіка	223
8.2. Прогнозування за допомогою діаграм	232
8.3. Наукова графіка	234
8.3.1. Функція	234
8.3.2. Способи задання функції	235
8.3.3. Позначення і запис функцій	239
8.3.4. Класифікація функцій	239
8.3.5. Основні елементарні функції	240
8.4. Графік функції	242
8.4.1. Діаграма Графік	244
8.4.2. Точкова діаграма.....	248
8.5. Нелінійна функція	254
8.6. Варіанти завдань для СРС до теми наукова графіка	271

Розділ 9. ЗАВДАННЯ ДО ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

9.1. Завдання для практичних занять до теми границя числової послідовності	274
9.2. Завдання для практичних занять до теми границя функції	276
9.3. Завдання для практичних занять до теми дослідження функцій ...	278
9.4. Завдання для практичних занять до теми невизначений інтеграл	279
9.5. Контрольні завдання до теми ліміти	280
9.6. Контрольні завдання до теми часткова похідна	280
9.7. Завдання для поточного контролю до теми математичний аналіз, поверхневі інтеграли	281
9.8. Контрольна робота з курсу вищої математики № 1	282
9.8.1. Зразок розв'язання і оформлення контрольної роботи № 1	282

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ КРИПТОГРАФІВ 292

9.9. Теорія скінченних полів, групи і підгрупи	292
9.9.1. Групи та їх властивості. Підгрупи. Приклади груп	292
9.9.2. Властивості циклічних груп	295
9.9.3. Відображення груп. Нормальні підгрупи. Фактор-групи	297

9.10. Скінченні поля і кільця	299
9.10.1. Кільця	299
9.10.2. Ідеал кільця	301
9.10.3. Типи ідеалів	303
9.11. Кільця поліномів	304
9.11.1. Поліноми над кільцями	304
9.11.2. Поліноми над полями	305
9.11.3. Скінченні поля	307
9.11.4. Розширення полів	308
9.11.5. Операції у скінченному полі	309
9.11.6. Корені поліномів. Незвідні поліноми	311
9.11.7. Алгебраїчні розширення	311
9.11.8. Примітивні елементи в скінченому полі	316
9.12. Еліптичні криві	316
9.12.1. Варіанти завдань контрольної роботи № 1	322
9.12.2. Контрольна робота до теми кратний інтеграл	337
Список літератури	339

ПЕРЕДМОВА

Підручник “Вища математика для криптографів з прикладами і задачами” створено на основі лекцій, які читав автор для студентів різних університетів зі спеціальностей “Кібербезпека, комп’ютерні науки, комп’ютерна інженерія, системний аналіз, прикладна математика і інформаційні системи і технології” протягом багатьох років, а також матеріалів однойменного дистанційного курсу за напрямками “Комп’ютерні науки та обчислювальна техніка”, “Прикладна математика”.

Підручник охоплює матеріал з вищої математики відповідно до програми підготовки бакалаврів інженерно-технічних спеціальностей “ІКІТД” за темами: матриці та визначники; системи лінійних алгебричних рівнянь; векторна алгебра та лінійні простори; комплексні числа; геометрія прямої і площини; криві та поверхні другого порядку.

Підручник містить ретельно відібрані і систематизовані теоретичні поняття, широкий набір практичних навчальних прикладів, задач для самостійного розв’язання, рисунків, схем тощо.

Застосування відповідних математичних понять окремо проілюстровано на широкому спектрі прикладів економічного та технічного змісту.

Матеріал підручника викладено на двох рівнях: базовому і розширеному. Базовий рівень містить означення, формулювання теорем, коментарі до них; методи розв’язання задач, проілюстровані прикладами; застосування математичних понять і методів. Розширений рівень доповнює базовий уточненими формулюваннями, додатковими фактами, доведеннями теорем, які наведені у тексті дрібним шрифтом і не є обов’язковими. Крім того, посібник містить:

- тест для самоконтролю;
- перелік екзаменаційних питань;
- історичні відомості;
- список використаної і рекомендованої літератури.

Підручник буде корисним як для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання.

Щиро вдячний своїй мамі
за безперервну підтримку і турботу,
які допомогли мені у цій та інших роботах.

Руслан Скуратовський

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.2. Матриці

Означення. *Матрицею порядку m на n* називають прямокутну таблицю чисел, яка складається з m рядків і n стовпців. На перетині i -го рядка та j -го стовпчика стоїть елемент a_{ij} , тобто елемент матриці з індексами i та j . Загальний вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Також така матриця позначається як A_{mn} . Число a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) називається елементом матриці. Числа i та j позначають відповідні i -й рядок і j -й стовпець, в яких цей елемент знаходиться.

Таким чином, матриці бувають *прямокутні* $m \times n$ і *квадратні* $n \times n$. Про квадратні матриці розмірності $n \times n$ кажуть, що вони мають **порядок n** .

Приклад прямокутної матриці $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Трикутною матрицею називають матрицю виду:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Дві матриці A і B розмірності $m \times n$ називаються рівними тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ для всіх i, j : $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Матриці позначають великими латинськими літерами, а також часто вживають скорочений запис $A = (a_{ij})$.

Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною матрицею n -го порядку і має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональ квадратної матриці, яка складається з елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, називається головною діагоналлю. Якщо всі елементи матриці, крім елементів головної діагоналі, є нулями, матриця називається діагональною. Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі — одиниці, матриця називається одиничною і позначається літерою E , або літерою I .

Матриця, всі елементи якої є нулями, називається нульовою матрицею і позначається літерою O .

Контрольне запитання. Якщо число рядків матриці дорівнює числу стовпців, то як називається така матриця?

Головною діагоналлю квадратної матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають діагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Квадратна матриця називається **верхньотрикутною**, якщо всі елементи цієї матриці, які знаходяться нижче головної діагоналі, рівні нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі елементи цієї матриці, які знаходяться не на головній діагоналі, рівні нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Діагональна матриця порядку n :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи діагональної матриці рівні між собою, таку матрицю називають **скалярною**:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & a & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & a \end{pmatrix}.$$

Якщо елементи діагональної матриці рівні одиниці, таку матрицю називають одиничною, якщо нулю — нульовою.

Операція транспонування позначається символом “ T ”, що вказується після позначення матриці у верхньому регістрі, наприклад A^T .

Очевидно, якщо вихідна матриця A мала розмір $m \times n$, то транспонована матриця A^T буде розміром $n \times m$. Матриця-рядок в результаті транспонування перетворюється на матрицю-стовпець і навпаки. Отже, $A_{ij}^T = A_{ji}$. Наприклад:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, для отримання транспонованої матриці достатньо кожен рядок вихідної матриці записати у вигляді стовпця результуючої, дотримуючись порядку прямування елементів.

Отже, транспонована матриця — матриця A^T , що виникає з матриці A в результаті унарної операції транспонування: заміни її рядків на стовпчики.

Формально, транспонована матриця $A^T = (b_{ij})$ для матриці $A = (a_{ij})$ визначається як

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

У лінійній алгебрі операція транспонування є проміжною дією, завдяки якій зручніше виконувати складні матричні перетворення, що мають власну логіку.

Операція транспонування застосовується до таблиць у процесі аналізу даних, у результаті стовпці таблиці стають рядками, а рядки — стовпцями.

Означення. Квадратна матриця M називається *кососиметричною*, якщо $M = -M^T$, де M^T — матриця транспонована відносно матриці M . Інакше кажучи, це квадратна матриця, у якій елементи симетричні відносно головної діагоналі, протилежні по знаку, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$, зокрема $a_{ii} = 0$.

Тобто ця матриця має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \vdots & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \vdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \vdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця-рядок (або вектор-рядок):

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \vdots \ a_{1n}).$$

Матриця-стовпець (або вектор-стовпець):

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

При цьому матриця-рядок відповідає транспонованій матриці-стовпцю і дорівнює (рис. 1):

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \vdots \ a_{1n}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}^T.$$

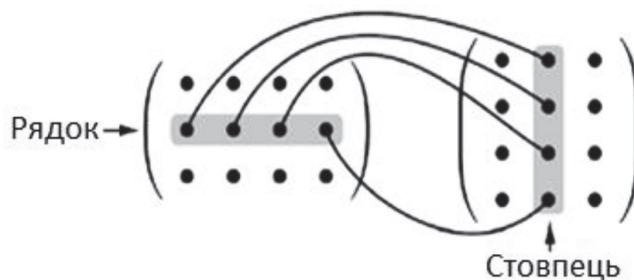


Рис. 1. Схема транспонування матриці

Трапецієподіба матриця:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \vdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \vdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \vdots & a_{3k} & a_{3k+1} & \vdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \vdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення. Дві матриці A і B називають рівними, якщо вони одного розміру та їхні відповідні елементи рівні між собою $a_{ij} = b_{ij}$.

1.3. Дії над матрицями

Додавання матриць:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \vdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \vdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \vdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \vdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості операції додавання:

$$A + B = B + A, (A + B) + C = A + (B + C).$$

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 3+1 & 1+2 \\ -1+7 & 3+4 \\ 4+1 & 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Множення матриці на число:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \vdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \vdots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \vdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Множення матриць — це бінарна операція, яка, використовуючи дві матриці, утворює нову матрицю, яка називається добутком матриць. Дійсні або комплексні числа множаться відповідно до правил елементарної арифметики. З іншого боку, матриці є масивами чисел, тому існують різні способи визначення добутку матриць. Загалом термін “матричне множення” означає різні способи перемноження матриць. Ключовими особливостями будь-якого матричного множення є: кількість рядків і стовпців у початкових матрицях і, звичайно, як елементи матриць утворюють нову матрицю.

Нехай дано дві прямокутні матриці A і B розмірності $m \times n$ і $n \times k$ відповідно:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця C розмірністю $m \times k$ називається їх добутком:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{bmatrix}, \quad \text{де } c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj}, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Операція множення двох матриць може бути здійснена тільки в тому випадку, якщо число стовпців у першому співмножнику дорівнює числу рядків у другому, тоді форма матриць вважається узгодженою. Зокрема, множення завжди здійсненне, якщо обидва множники — квадратні матриці одного й того самого порядку. Слід зауважити, що з існування добутку AB зовсім не впливає існування добутку BA .

Відомо, що *визначник* матриці при її *транспонуванні* не змінюється. Відповідно, якщо яка-небудь властивість доведена для рядків, то вона доведена й для стовпців.

1.4. Числові характеристики матриць

1.4.1. Перестановки

Розглянемо n перших натуральних чисел $1, 2, 3, \dots, n$. Запишемо ці числа у довільному порядку

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \quad (1.2)$$

тут числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ є ті самі числа $1, 2, \dots, n$, але записані, можливо, в деякому іншому порядку.

Означення. Перестановкою називається будь-яке розміщення чисел $1, 2, \dots, n$. Відомо, що число всіх, різних перестановок з n чисел $1, 2, \dots, n$ дорівнює $n!$

При цьому розміщення чисел $1, 2, \dots, n$ у порядку їх зростання є також однією з перестановок.

Розглянемо довільну перестановку (1.2). Виберемо в ній два числа σ_i і σ_j . Якщо в цій перестановці більше з чисел σ_i і σ_j розміщено зліва від меншого (більше передуює меншому), то кажуть, що числа σ_i і σ_j утворюють інверсію (порушення порядку). В іншому випадку числа σ_i і σ_j інверсії не утворюють. Так, у перестановці $3, 2, 1, 4$ інверсії утворюють пари чисел 3 і 2 , 3 і 1 , 2 і 1 , а пари чисел 3 і 4 , 2 і 4 , 1 і 4 інверсії не утворюють.

Знайдемо ознаку наявності інверсії між числами σ_i і σ_j у перестановці (1.2). Припустимо, що числа σ_i і σ_j утворюють *інверсію*. Якщо $\sigma_i > \sigma_j$, то $i < j$. Якщо $\sigma_i < \sigma_j$, то $i > j$ (це означає що в перестановці (1.2) більше число передуює меншому). В обох випадках різниці $\sigma_i - \sigma_j$ та $i - j$ мають протилежні

знаки. Отже, якщо між числами σ_i і σ_j є інверсія, то виконується нерівність $(\sigma_i - \sigma_j)(i - j) < 0$.

Якщо числа σ_i і σ_j не утворюють інверсію, то різниці $\sigma_i - \sigma_j$ та $i - j$ мають однакові знаки і $(\sigma_i - \sigma_j)(i - j) > 0$. Отже, за знаком добутку $(\sigma_i - \sigma_j)(i - j) < 0$ можна робити висновок про наявність інверсії між числами σ_i і σ_j . Позначимо число всіх інверсій у перестановці (1.2) через $I(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Наприклад, для перестановки 3, 2, 1, 4 число $I(3, 2, 1, 4) = 3$, а для перестановки 2, 4, 3, 1 число $I(2, 4, 3, 1) = 4$.

Означення. Перестановка $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ називається *парною*, якщо число інверсій $I(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ парне. Якщо число $I(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ непарне, то перестановка називається *непарною*.

Наприклад перестановка 3, 2, 1, 4 непарна, а перестановка 2, 4, 3, 1 парна.

Виведемо ознаку парності перестановки. Розглянемо в перестановці всі можливі пари чисел σ_k і σ_l . Таких пар є така кількість, скільки сполук можна скласти з n елементної множини по 2, тобто $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$. Складемо добуток

$P = \prod_{(kl)} (\sigma_k - \sigma_l)(k - l)$. Символ (kl) називається транспозицією і означає, що в даний добуток входять множники виду $(\sigma_k - \sigma_l)(k - l)$, які відповідають усім можливим парам чисел k і l з перестановки (1.4). Визначимо знак добутку P . Як відомо, числа σ_k і σ_l утворюють інверсію тоді, коли $[(\sigma_k - \sigma_l)(k - l)] < 0$. Тому в добутку P число від'ємних множників $[(\sigma_k - \sigma_l)(k - l)]$ точно дорівнює $I(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Отже, якщо число парне, то $P > 0$, а якщо число $I(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ непарне, то $P < 0$, тобто за знаком P можна визначити парність перестановки.

Наприклад, для перестановки 3, 2, 1, 4 маємо:

$$P = (\sigma_4 - \sigma_3)(4 - 3) \cdot (\sigma_4 - \sigma_2)(4 - 2) \cdot (\sigma_4 - \sigma_1)(4 - 1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2)(2 - 1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)(3 - 1) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)(2 - 1) = ((4 - 1) \cdot (4 - 3)) \cdot ((4 - 2) \cdot 2) \cdot ((4 - 3) \cdot 3) \cdot ((1 - 2) \cdot 1) \cdot ((1 - 3) \cdot 2) \cdot ((2 - 3) \cdot 1) < 0.$$

1.4.2. Визначник матриці

Визначником [2] квадратної матриці порядку n (чи визначником порядку n) називається алгебраїчна сума усіх можливих добутків елементів матриці, що взяті по одному з кожного рядка та по одному з кожного стовпчика.

Для обчислення визначника підраховуємо алгебраїчну суму добутків елементів матриці. Кожен такий добуток $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$ береться зі знаком $+$, якщо індекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ утворюють *парну перестановку* [2], та зі знаком $-$, якщо індекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ утворюють *непарну перестановку*:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \in S_n} (-1)^{Inv(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

де S_n — симетрична група перестановок [2] на n елементах. Загалом таких добутоків $\in n!$

Схема обчислення визначника 3-го порядку (рис. 2):

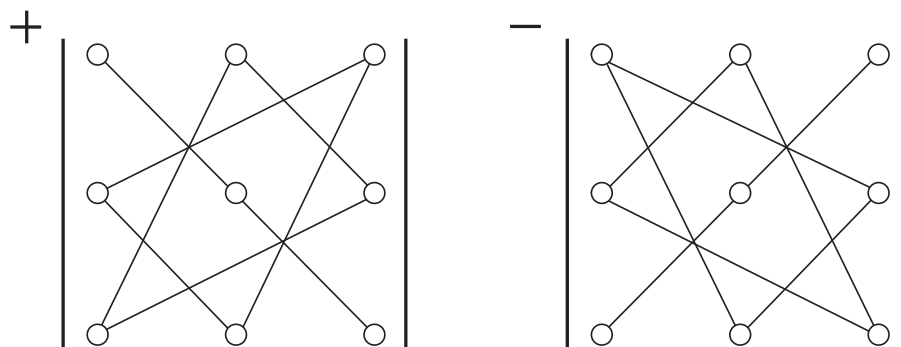


Рис. 2. Обчислення визначника

$$\det A_{3 \times 3} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Властивості визначника:

1. *Визначник* матриці при *транспонуванні* не змінюється. Відповідно, якщо яка-небудь властивість доведена для рядків, то вона доведена й для стовпців.
2. Якщо поміняти місцями два рядки (або два стовпці), то визначник збереже своє абсолютне значення, але змінить знак.
3. *Лінійна властивість визначника*:

нехай дано рядки (стовпці) $a_1, a_2, \dots, a_n$. Сума добутоків цих рядків (стовпців) на довільні числа називається лінійною комбінацією рядків (стовпців). Якщо j -й стовпець (i -й рядок) є лінійною комбінацією стовпців (рядків) $a_1, a_2, \dots, a_k$, тобто становить вираз $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$, то визначник цієї матриці дорівнює сумі визначників $\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \dots + \alpha_k \Delta_k$, де Δ_i — отримується з вихідного визначника заміною j -го стовпця (i -го рядка) стовпцем (рядком) a_i .

Приклад. Розглянемо випадок, коли j -й стовпець є лінійною комбінацією двох стовпців:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & \alpha a'_{1j} + \beta a''_{1j} & a_{1j+1} & a_{1j+2} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & \alpha a'_{2j} + \beta a''_{2j} & a_{2j+1} & a_{2j+2} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & \alpha a'_{nj} + \beta a''_{nj} & a_{nj+1} & a_{nj+2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a'_{1j} & a_{1j+1} & a_{1j+2} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a'_{2j} & a_{2j+1} & a_{2j+2} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a'_{nj} & a_{nj+1} & a_{nj+2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a''_{1j} & a_{1j+1} & a_{1j+2} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a''_{2j} & a_{2j+1} & a_{2j+2} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a''_{nj} & a_{nj+1} & a_{nj+2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
5. Якщо рядок (стовпець) помножити на довільне число, то і визначник множитиметься на це саме число.
6. Якщо визначник містить два пропорційних рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
7. Якщо всі елементи одного з рядків (стовпців) дорівнюють нулю, то і визначник дорівнює нулю.
8. Якщо до будь-якого рядка (стовпця) додати інший рядок (стовпець), помножений на будь-яке/довільне число, то визначник не зміниться.
9. Сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.
10. Визначник одиничної матриці рівний одиниці: $\det(A) = 1$.

1.4.3. Задачі для самостійного розв'язання

1. Виписати транспозиції, за допомогою яких від перестановки (1, 2, 4, 3, 5) можна перейти до перестановки (2, 5, 3, 4, 1).
2. Вважаючи, що (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) — початкове розташування, визначити число інверсій [2] в перестановках:
 - 1) (1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5);
 - 2) (2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4);
 - 3) (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).
3. Вважаючи, що (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) — початкове розташування, підібрати i та k так, щоб:
 - 1) перестановка (1, 2, 7, 4, i , 5, 6, k , 9) була парною;
 - 2) перестановка (1, i , 2, 5, k , 4, 8, 9, 7) була непарною.
4. Знайти число інверсій і порушень початкового порядку [2] в наступних перестановках:
 - 1) (3 6 9 ... $3n$ 1 4 7 ... $3n - 2$ 2 5 ... $3n - 1$);
 - 2) (1 4 7 ... $3n - 2$ 2 5 ... $3n - 1$ 3 6 ... $3n$).
5. З яким знаком у визначник 6-го порядку входять добутки:
 - 1) $a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{14} a_{65}$;
 - 2) $a_{32} a_{43} a_{14} a_{51} a_{66} a_{25}$?
6. Підібрати i та k таким чином, щоб добуток $a_{1i} a_{32} a_{4k} a_{25} a_{53}$ входив у визначник 5-го порядку зі знаком плюс.
7. Виписати всі доданки, які входять до складу визначника 4-го порядку зі знаком мінус і містять множник a_{23} .

8. Визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ дорівнює Δ . Чому дорівнює визначник

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} ?$$

9. Спростити визначник $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$, розклавши його на доданки.

10. Довести, що

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

11. Розкласти за елементами рядка або стовпця, що містить букви, та обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

12. Обчислити визначники 2-го та 3-го порядку, користуючись формулами (1.3) та (1.4):

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28423 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad 7) \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix};$$

$$8) \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}; \quad 9) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

1.4.4. Задачі з розв'язками

1. За якої умови справедлива рівність:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 0 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. $1 - \cos^2 j - \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma) + \cos \beta (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) =$
 $= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma.$

Звідси $1 = \cos^2 j + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta.$

Приклад. При яких значеннях k система має ненульові розв'язки:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = k^2 - 1 = 0;$$

$$k = \pm 1.$$

2. Обчислити визначники:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

До всіх рядків, починаючи з другого, додаємо перший, тоді:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Віднімемо другий рядок з усіх наступних, а потім від другого рядка віднімемо перший, помножений на -2 , й отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (n-2)!$$

3. Користуючись теоремою Лапласа [2], розрахувати визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

У цьому визначнику із шести мінорів 2-го порядку, які стоять в другому та третьому рядках, тільки один не дорівнює нулю:

$$\Delta_4 = (-1)^{2+4+3+4} \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{13} (-13)(-5) = -65.$$

4. Розрахувати визначник:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 40.$$

5. Розрахувати визначник d :

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

До другого рядка додаємо третій, помножений на 5, і отримаємо:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{5+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

До першого рядка додаємо другий, помножений на 2, та від третього віднімаємо другий, помножений на 3, а від четвертого, віднявши другий, помножений на 2, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = 36 \cdot (-72) - (-33) \cdot (-104) + (-24) \cdot (-208) = 1032.$$

6. Довести, що якщо всі елементи визначника, розташовані по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то цей визначник дорівнює добутку елементів, які стоять на головній діагоналі.

Доведення проведемо по індукції:

а) для $n = 2$ — очевидно $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$;

б) припустимо, що для $n = k - 1$ це твердження доведено.

Розглянемо визначник k -го порядку:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = \dots$$

Але до мінору, який стоїть у правій частині припущення індукції справедливо, тоді визначник дорівнює $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{kk}$.

7. Визначником Вандермонда називається визначник:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Довести, що при будь-якому n цей визначник дорівнює добутку будь-яких різниць виду $a_i - a_j$, де $1 \leq j < i \leq n$.

Доведення проведемо по індукції:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Нехай наше твердження вже доведено для визначника $(n - 1)$ -го порядку. Перетворимо d наступним чином: із n -го рядка (останнього) віднімемо $(n - 1)$ -й, помножений на a_1 , і т. д. і від другого рядка віднімемо перший, помножений на a_1 :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

(розкладемо по першому стовпчику і перейдемо до визначника $(n-1)$ -го порядку, після винесення з усіх стовпчиків загальних множників):

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1).$$

8. Обчислити визначник:

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-8)(-20) - (-10) \cdot (-62) - 7 \cdot 87 = -1069.$$

1.4.5. Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці називаються:

1. Перестановка двох рядків (стовпців) матриці місцями.
2. Множення рядків (стовпців) матриці на довільне число, яке не дорівнює нулю.
3. Додавання одного рядка (стовпця) матриці до іншого, помноженого на скаляр не рівний 0, рядка (стовпця).

Зауважимо, що ці перетворення зберігають *еквівалентність* матриць [1; 2].

Теорема Гаусса. Довільну ненульову матрицю за допомогою елементарних перетворень можна привести до трапецієподібної форми.

Означення. Дві прямокутні матриці A і B однакових розмірів називаються *еквівалентними*, якщо існують дві невироджені квадратні матриці R та S такі, що:

$$B = RAS.$$

Отже, дві матриці, що відповідають одному і тому ж лінійному оператору при різному виборі базисів в X та Y , завжди еквівалентні між собою.

1.4.6. Системи лінійних рівнянь і метод Крамера

Означення. Система з m алгебраїчних лінійних рівнянь (СЛАР) з n невідомими — це сукупність рівнянь, у кожному з яких є невідомі $x_1, x_2, \dots, x_n$ наявні у першому степені:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1.3)$$

де числа a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) — коефіцієнти при невідомих; i — номер рівняння; j — номер невідомої; b_i — вільні члени.

- Розв'язок СЛАР — це впорядкований набір значень невідомих

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

який при підстановці в кожне рівняння системи замість невідомих відповідно $x_1, x_2, \dots, x_n$ обертає їх у правильні рівності.

- Розв'язати СЛАР — це значить вказати всі розв'язки системи, тобто такі набори значень невідомих, які обертають рівняння системи в тотожності.

- *Несумісна система* — це система рівнянь, яка не має жодного розв'язку, а якщо має хоча б один розв'язок — сумісна. *Сумісна система* рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною, якщо розв'язків більш як один.

1.4.6.1. Метод Крамера розв'язку систем лінійних рівнянь

Правило (метод) Крамера застосовується до систем, у яких число рівнянь рівне числу невідомих. Цей метод використовує визначники.

Метод Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь із n змінними:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases} \quad (1.4)$$

над полем F . Позначимо через A основну матрицю цієї системи: $A = \|\alpha_{ik}\|$.

Теорема. Якщо $|A| \neq 0$, то ця система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, що виражається у формулах:

$$x_1 = |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + \dots + \beta_n A_{n1}), \dots, x_n = |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + \dots + \beta_n A_{nn}). \quad (1.5)$$

Доведення. Покладаючи, що $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ запишемо початкову систему у вигляді матричного рівняння:

$$AX = b, \quad (1.6)$$

рівносильного вказаній системі. З умови, що $|A| \neq 0$ виходить, що рядки матриці A лінійно незалежні та системи (1.4) і (1.6) мають єдине рішення $X = A^{-1} b$.

Звідси, оскільки:

$$A^{-1} = |A|^{-1} A^*,$$

де A^* — транспонована матриця з алгебраїчних доповнень, отримаємо:

$$\begin{aligned} A^{-1}b &= |A|^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = |A|^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1 A_{11} & \dots & \beta_n A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_1 A_{1n} & \dots & \beta_n A_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} |A|^{-1} (\beta_1 A_{11} \dots \beta_n A_{n1}) \\ \dots & \dots \\ |A|^{-1} (\beta_1 A_{1n} \dots \beta_n A_{nn}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

З останньої рівності випливають формули Крамера (1.5).

1.4.6.2. Системи з двома рівняннями і двома невідомими

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

Знайдемо відповідні до методу Крамера визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ — визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих;

$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ — визначник, отриманий з визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при x на стовпець з коефіцієнтів вільного вектора $\vec{b}$ (стовпець вільних членів);

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ — визначник, отриманий з визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при y на стовпець вільних членів.

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна і визначена, тобто має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

2. Якщо $\Delta = 0$, але хоча б один із визначників Δ_x, Δ_y відмінний від нуля, то система не має розв'язків (несумісна).

3. Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система має нескінченно багато розв'язків (сумісна і не визначена).

Приклад 1. Розв'язати за допомогою методу Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11 \neq 0, \text{ тому СЛАР має єдиний розв'язок.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 5 = 11, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-22}{11} = -2.$$

Відповідь. Система рівнянь *сумісна* і визначена, її єдиний розв'язок $X = (1; -2)$.

Приклад 2. Розв'язати за допомогою методу Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Розв'язання. Визначник системи дорівнює нулю: } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0,$$

проте один із допоміжних визначників не дорівнює нулю: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 0 = -4 \neq 0$, тобто СЛР не має розв'язків і є *несумісною*.

Відповідь. СЛР не має розв'язків, тобто СЛР *несумісна*.

Позначатимо також визначник матриці, в якій зроблена заміна на стовпець з коефіцієнтів вільного вектора $\vec{b}$ (стовпець вільних членів) як Δ_x , якщо зроблена заміна другого стовпця на стовпець з коефіцієнтів вільного вектора $\vec{b}$ — Δ_y , якщо зроблена заміна третього стовпця на вектор стовпець вільних членів $\vec{b}$ — Δ_z .

Приклад 3. Розв'язати за допомогою методу Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 9x + 15y = 12 \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Тому система має *нескінченно багато розв'язків*.

Розділивши коефіцієнти 2-го рівняння на 3, отримаємо:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$

Залишимо тільки одне із цих рівнянь: $3x + 5y = 4$.

Виразимо y через x : $y = \frac{4-3x}{5}$, значення x — будь-яке дійсне число. Це і є вираз для *спільного розв'язку* СЛАР.

$$\text{Відповідь: } X = \left(x; \frac{4-3x}{5} \right), \text{ де } x \in R.$$

Надаючи x різні значення, можна отримати нескінченну множину *часткових розв'язків*. Наприклад, при $x = 3$ отримаємо $y = \frac{4-9}{5} = -1$ і перший частковий розв'язок $(3; -1)$. При $x = -7$ отримаємо $y = \frac{4+21}{5} = 5$ і другий частковий розв'язок $(-7; 5)$ та ін.

1.4.6.3. Системи з трьома рівняннями і трьома невідомими

Розглянемо СЛР:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Далі обчислити визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.}$$

2. Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ відмінний від нуля, то система не має розв'язків.

3. Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система має нескінченно багато розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x \quad + 2z = -1. \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо визначник з коефіцієнтів при невідомих і обрахуємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 0 - 0 - 2 - 1 = -2 \neq 0,$$

тобто СЛР має єдиний розв'язок.

Знайдемо допоміжні визначники і значення невідомих:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 = -2, \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Відповідь. Система сумісна і визначена, єдиний розв'язок $X = (x; y; z) = (1; 0; -1)$.

Розглянемо приклад, у якому СЛАР має нескінченно багато розв'язків, і вони будуть знайдені з використанням формул Крамера.

Приклад 5. Розв'язати СЛР:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \quad + 2x_3 = -1. \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Слід зауважити, що третє рівняння системи дорівнює сумі перших двох рівнянь, тобто залежить від перших двох рівнянь.

Відкинувши третє рівняння, отримаємо рівносильну систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Залишимо у лівій частині системи ті невідомі, коефіцієнти при яких утворюють визначник, який не дорівнює нулю.

Наприклад, коефіцієнти при x_1 і x_2 утворюють визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому залишимо у лівій частині рівнянь доданки з x_1 і x_2 , а доданки з x_3 перенесемо у праву частину з протилежним знаком.

Невідоме x_3 назвемо *вільним*, а невідомі x_1 і x_2 — *базисними невідомими*.

Запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 \\ x_1 = -1 - 2x_3 \end{cases}$$

і застосуємо до неї правило Крамера.

Визначник основної матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -x_3 & 1 \\ -1 - 2x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-1)(-1 - 2x_3) = 1 + 2x_3.$$

Тому маємо розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1 + 2x_3}{1} = 1 + 2x_3.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ 1 & (-1 - 2x_3) \end{vmatrix} = -1 - 2x_3 - (-x_3) = -1 - x_3.$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1 - x_3}{1} = -1 - x_3.$$

Виразимо загальний розв'язок у вигляді вектора:

$$X = (1 + 2x_3, -1 - x_3, x_3) | x_3 \in R$$

Це загальний розв'язок невизначеної СЛАР, де x_3 — вільна змінна, яка набуває будь-яких дійсних значень.

Із загального розв'язку можна отримати **часткові розв'язки**, якщо надати вільній змінній яке-небудь конкретне значення з області визначення системи.

Наприклад, нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, то частковий розв'язок $X = (3, -2, 1)$ та ін.

А якщо надати вільній змінній x_3 значення -1 , то отримаємо інший частковий розв'язок $X = (-1, 0, -1)$.

1.4.7. Метод Гаусса-Жордана розв'язку СЛАР

Метод Гаусса-Жордана використовується для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), знаходження оберненої матриці, знаходження координат вектора у заданому базисі, відшукування рангу матриці. Метод є модифікацією метода Гаусса, який також застосовується для розв'язання СЛАР.

Алгоритм:

1. Обирається перша зліва колонка, що містить хоч одне ненульове значення.
2. Якщо верхнє число у цій колонці — нуль, то переставляють увесь перший рядок матриці з іншим рядком матриці, де у цій колонці немає нуля.
3. Усі елементи першого рядка діляться на верхній елемент обраної колонки.
4. Від рядків, що залишились, віднімається перший рядок, помножений на перший елемент відповідного рядка, з метою отримання нуля в першому елементі кожного рядка (крім першого).
5. Далі повторюємо ці операції з матрицею, отриманою з початкової матриці після викреслювання першого рядка та першого стовпчика.
6. Після повторення операцій $n - 1$ разів отримаємо верхню трикутну матрицю.
7. Віднімаємо від передостаннього рядка останній рядок, помножений на відповідний коефіцієнт, щоб у передостанньому рядку залишилась лише 1 на головній діагоналі.
8. Повторюємо попередній крок для наступних рядків. У результаті отримуємо одиничну матрицю і розв'язок на місці вільного вектора (над ним необхідно виконувати ті самі перетворення).

Приклад. Розв'язати задачу, використовуючи метод Гаусса. Нехай маємо сукупність векторів $\bar{a}_1 = (1, 3, 1)$, $\bar{a}_2 = (2, 1, 1)$, $\bar{a}_3 = (3, -1, 1)$ Перевірити на залежність цю сукупність векторів.

Обчислимо визначник матриці, складеної із координат векторів:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 9 - 3 + 1 - 6 = 0.$$

Отже, дана сукупність векторів є лінійно залежною.

Щоб встановити цю залежність запишемо систему однорідних рівнянь за рівністю $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3 = 0$:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}.$$

Необхідно знайти хоча б один ненульовий розв'язок системи рівнянь, яка має безліч розв'язків $|A| = 0$. Для знаходження розв'язку скористаємось методом Гаусса. Для цього запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній розширеній матриці системи відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_2 + 2k_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Отримали систему двох рівнянь з трьома невідомими. У цьому випадку невідома k_3 є незалежною, може приймати довільні числові значення. Дві інші невідомі k_1, k_2 залежать від невідомої k_3 та визначаються через неї рівностями $k_2 = -2k_3, k_1 = k_3$. Називаємо k_3 вільною змінною. Якщо взяти $k_3 = 1$, то залежні змінні набудуть наступні значення: $k_1 = 1, k_2 = -2$. Тобто отримуємо таку залежність між векторами:

$$\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3 = 0, \text{ або } \bar{a}_1 = 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3.$$

1.4.8. Задачі для самостійного розв'язання

1. Обчислити визначники методом Гаусса:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити визначники зведенням до трикутного вигляду:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати рівняння та нерівності:

$$1) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad 3) \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 1 \end{vmatrix} \leq 0; \quad 4) \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} < 1.$$

4. Використовуючи властивості визначників, довести рівності:

$$1) \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 1 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.5. Практичне застосування систем лінійних рівнянь

Розглянемо практичні сценарії застосування систем лінійних рівнянь, які мають широке застосування у різних галузях.

1.5.1. Фізика: закони збереження

Системи лінійних рівнянь широко використовуються для вираження фізичних законів, зокрема законів збереження енергії та кількості руху. Наприклад, рух тіла може бути описаний системою рівнянь, де кожне рівняння представляє закон збереження кількості руху для окремого напрямку:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{cases}$$

1.5.2. Економіка: лінійні моделі попиту та пропозиції

У галузі економіки системи лінійних рівнянь використовуються для побудови лінійних моделей попиту та пропозиції на ринку. Наприклад, система може виглядати наступним чином:

$$\begin{cases} p = a - bQ_d \\ p = c + dQ_s \end{cases},$$

де p — ціна; Q_d — кількість товарів, яку споживачі готові купити; Q_s — кількість товарів, яку виробники готові виробити; a, b, c, d — параметри моделі.

1.5.3. Інженерія: системи лінійних рівнянь у технічних розрахунках

У технічних науках системи лінійних рівнянь широко застосовуються для розв'язання складних інженерних задач. Наприклад, в електричних колах система рівнянь може виражати закони Кірхгофа для кожного вузла чи петлі:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = V \end{cases}$$

де I_1, I_2, I_3 — струми; R_1, R_2 — опори; V — напруга.

1.5.4. Розв'язки практичних задач

Розглянемо конкретні приклади задач, що можуть бути розв'язані за допомогою систем лінійних рівнянь.

Приклад 1. Задача про розподіл бюджету.

Нехай у нас є бюджет B та план розподілу між трьома сферами x, y, z . Система рівнянь може виглядати так:

$$\begin{cases} x + y + z = B \\ 0,2x + 0,3y + 0,5z = 0,4B \end{cases}$$

де перше рівняння визначає загальний обсяг бюджету, а друге — умову щодо відсоткового розподілу між сферами.

Приклад 2. Задача про змішування розчинів.

У хімії можна вирішити задачу змішування двох розчинів з різними концентраціями. Наприклад:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,3y = 0,25 \\ x + y = 10 \end{cases},$$

де x, y — об'єми двох розчинів, а перше рівняння визначає концентрацію після змішування.

Графічне зображення систем лінійних рівнянь. У мистецтві таке графічне зображення використовують для створення різноманітних графічних ефектів. Наприклад, система лінійних рівнянь у двох змінних $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ може бути представлена на площині, де кожне рівняння визначає пряму лінію. Такий підхід застосовують для створення художніх образів та графічних композицій.

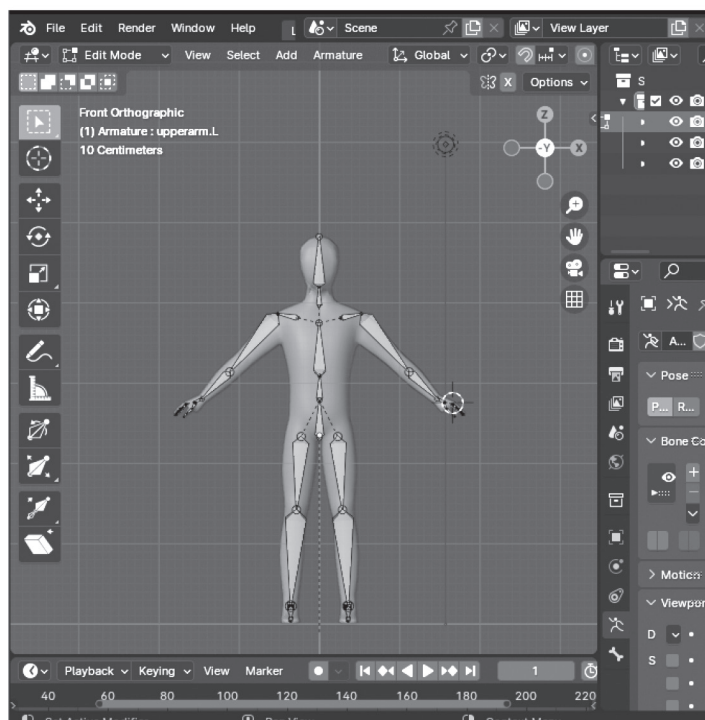
Розглянемо на прикладі графічного 3D редактора Blender використання системи лінійних рівнянь, що може бути корисним для створення та управління анімаціями, моделюванням та іншими аспектами 3D-дизайну. Blender підтримує програмування на Python, що дозволяє інтегрувати математичні розрахунки у робочий процес. Приклад застосування системи лінійних рівнянь для керування рухом об'єктів у Blender:

```
import bpy
import math
# Очищення сцен від існуючих об'єктів
bpy.ops.object.select_all(action='SELECT')
bpy.ops.object.delete(use_global=False)
# Створення нового об'єкта
bpy.ops.mesh.primitive_cube_add(location=(0, 0, 0))
obj = bpy.context.object
# Створення кривої для анімації
curve_data = bpy.data.curves.new(name='AnimationPath', type='CURVE')
```

```

curve_data.dimensions = '3D'
# Створення кривої
curve = bpy.data.objects.new('Curve', curve_data)
bpy.context.collection.objects.link(curve)
# Додавання сегментів до кривої
polyline = curve_data.splines.new('POLY')
polyline.points.add(399) # У нас 400 точок для анімації
# Рівняння прямих
x_vals = np.linspace(-10, 10, 400)
y1_vals = 2 * x_vals + 1
y2_vals = -x_vals + 3
# Заповнення точок кривої
for i, (x, y1, y2) in enumerate(zip(x_vals, y1_vals, y2_vals)):
    polyline.points[i].co = (x, y1, 0, 1) # або (x, y2, 0, 1) для другої лінії
# Приєднання об'єкта до кривої
bpy.ops.object.select_all(action='DESELECT')
obj.select_set(True)
curve.select_set(True)
bpy.context.view_layer.objects.active = curve
bpy.ops.object.parent_set(type='FOLLOW')
# Встановлення ключових кадрів для анімації
frame_num = 0
for i in range(400):
    bpy.context.scene.frame_set(frame_num)
    obj.location = (x_vals[i], y1_vals[i], 0) # або y2_vals[i] для другої лінії
    obj.keyframe_insert(data_path="location", index=-1)
    frame_num += 1

```



1.5.5. Застосування лінійних рівнянь у комп'ютерних науках

У комп'ютерних науках системи лінійних рівнянь часто використовуються для розв'язання різних задач. Наприклад, алгоритми графічного зображення в комп'ютерних іграх можуть використовувати системи лінійних рівнянь для моделювання та відображення тривимірних об'єктів:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - 4y + 2z = 7 \end{cases}.$$

1.6. Числові методи розв'язання систем лінійних рівнянь

У випадках, коли аналітичне розв'язання систем лінійних рівнянь складне чи неможливе, можна використовувати чисельні методи:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -x + 5y + 2z = 8 \\ 2x + 3y + 6z = 11 \end{cases}.$$

Один із них — метод Якобі, який дозволяє наближено знаходити розв'язок системи.

1.6.1. Числові методи: метод Гаусса та метод Зейделя

Метод Гаусса

Метод Гаусса — це широковідомий метод для розв'язування систем лінійних рівнянь. Зазвичай під цим алгоритмом розуміють деяку послідовність у використанні елементарних операцій над рівняннями для приведення системи до трикутної форми, після чого застосовується зворотний хід для знаходження значень невідомих:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом розв'язку систем лінійних рівнянь. Цей метод використовує попередні значення невідомих для поліпшення наближеного розв'язку і особливо ефективний для систем з великою кількістю рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \\ a_{33}x_3^{(k+1)} = b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \end{cases}.$$

Опис методу

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$Ax = b,$$

де A — квадратна матриця коефіцієнтів; x — вектор невідомих; b — вектор вільних членів.

Метод Гаусса-Зейделя розбиває систему на частини і послідовно використовує нові значення компонент вектора x під час обчислень. Розглянемо систему з n рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Ітераційний процес Гаусса-Зейделя виглядає так:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right).$$

Формули для кожного кроку

Для кожного i -го рівняння.

Ініціалізація: починаємо з початкового наближення $x^{(0)}$.

Ітерації: для k -ї ітерації ($k=0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^{(k)} \right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)} \right) \end{cases}.$$

Умови зупинки: ітераційний процес продовжується доти, доки не буде досягнуто бажаної точності. Зазвичай використовуються наступні критерії зупинки:

- кількість ітерацій перевищує задане значення;
- норма різниці між ітераціями стає меншою за заданий поріг:
 $\|x(k+1) - x(k)\| < \epsilon$, де ϵ — бажана точність.

Переваги та недоліки:

переваги:

- простий у реалізації;
- часто швидко сходиться для діагонально домінантних матриць;

недоліки:

- не гарантує збіжності для всіх матриць;
- може бути повільним у випадку погано обумовлених матриць.

Метод Зейделя широко використовується в числових методах та в обчислювальній математиці для розв'язання великих систем рівнянь завдяки своїй простоті та ефективності в багатьох практичних випадках.

Системи лінійних рівнянь також відіграють важливу роль у машинному навчанні. Наприклад, задачі лінійної регресії та класифікації можуть бути сформульовані як системи лінійних рівнянь. Методи оптимізації, використовувані при навчанні моделей, часто базуються на розв'язанні систем лінійних рівнянь.

1.7. Базис векторного простору. Перетворення координат вектора при переході від одного базису до іншого

Векторні простори є основною концепцією в лінійній алгебрі та вищій математиці. Їх розуміння є критично важливим для багатьох наукових і технічних дисциплін.

Означення. Якщо вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ утворюють упорядковану лінійно незалежну систему і додавання до неї хоча б одного вектора робить її лінійно залежною, то кажуть, що система векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ утворює *базис*.

Якщо для довільного вектора $\vec{a}$ та довільної системи векторів $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ виконується рівність (1.7), то кажуть, що вектор $\vec{a}$ є *лінійною комбінацією* вказаної системи векторів:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n. \quad (1.7)$$

Рівність (1.7) називають розкладанням вектора $\vec{a}$ у базисі векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ — координати вектора $\vec{a}$ у новому базисі.

Теорема. Будь-який вектор у просторі можна розкласти за базисом, при цьому цей розклад єдиний.

Зауваження. Щоб деякий вектор $\vec{a}$ розкласти за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ необхідно знайти коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$, при яких лінійна комбінація векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ буде дорівнювати вектору $\vec{a}$.

Нехай $\{g\} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ і $\{f\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ — два базиси в n -вимірному просторі R_n . Для будь-якого вектора $\vec{X} \in R_n$ виконується така рівність:

$$\vec{X} = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \dots + \xi_n g_n = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \dots + \eta_n f_n, \quad (1.8)$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{g\}$; $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{f\}$.

Нехай задано матрицю A переходу від базису $\{g\}$ до базису $\{f\}$. Тоді вектори g_i через вектори f_j будуть виражені так:

[illegible]

або

$$g_j = \sum_{i=1}^n b_{ji} f_i,$$

де B — обернена матриця до матриці A . Підставивши у вираз (1.8) значення векторів g_i , дістанемо:

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^n \xi_j g_j = \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^n b_{ji} f_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ji} \xi_j \right) f_i.$$

Звідси, внаслідок єдиності розкладу вектора $\vec{X}$ за базисом $\{f\}$, маємо:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} \xi_j.$$

У розгорнутому вигляді дістанемо систему рівностей:

[illegible]

Таким чином, координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{f\}$ лінійно виражається через координати вектора $\vec{X}$ відносно базису $\{g\}$; коефіцієнти цих лінійних перетворень утворюють матрицю C , яка є транспонованою для матриці A^{-1} , оберненої до матриці A . Отже,

$$C = (A^{-1})^T.$$

1.7.1. Ранг і базис системи векторів

Означення 1. Рангом r даної системи векторів називається максимальне число лінійно незалежних векторів цієї системи.

Теорема 1. Ранг n -вимірного простору дорівнює вимірності простору n .

Доведення. Ранг системи векторів не може бути більшим за n . Крім того, в n -вимірному просторі є система n лінійно незалежних одиничних

векторів, а це означає, що ранг не може бути менший за n . Таким чином, $r = n$.

Теорему доведено.

Означення 2. Базисом системи векторів, що має ранг r , називається будь-яка сукупність з r лінійно незалежних векторів даної системи.

Відповідно базисом n -вимірного простору є будь-яка сукупність n лінійно незалежних векторів цього простору. Серед усіх можливих базисів n -вимірного простору виділяють одиничний базис.

Теорема 2. Будь-який вектор $\vec{X}$ системи можна подати єдиним способом у вигляді комбінації векторів базису системи $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_r$:

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \dots + \alpha_r \vec{X}_r. \quad (1.9)$$

Доведення. Розглянемо систему векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_r, \vec{X}$. Згідно з означенням рангу системи вона є лінійно залежною, тобто

$$c_1 \vec{X}_1 + c_2 \vec{X}_2 + \dots + c_r \vec{X}_r + c \vec{X} = 0.$$

Тут $c \neq 0$, бо в іншому разі перші r векторів базису були б лінійно залежними, що неможливо. Розв'язавши останню рівність відносно $\vec{X}$, дістанемо розклад цього вектора за векторами базису $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_r$. Для доведення єдності розкладу припустімо обернене, тобто, що існують два розклади:

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \dots + \alpha_r \vec{X}_r \quad \text{і} \quad \vec{X} = \beta_1 \vec{X}_1 + \beta_2 \vec{X}_2 + \dots + \beta_r \vec{X}_r.$$

Віднявши почленно ці рівності, дістанемо:

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \vec{X}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{X}_2 + \dots + (\alpha_r - \beta_r) \vec{X}_r.$$

Оскільки $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_r$ — лінійно незалежні, то остання рівність можлива тільки при $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_r - \beta_r = 0$, звідки $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_r = \beta_r$. Теорему доведено.

Теорема 3. Якщо до системи векторів $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_r$ додати або виключити з неї вектор, який лінійно виражається через вектори системи, то ранг системи не зміниться.

1.8. Квадратичні форми

Квадратична форма — це алгебраїчний вираз, який використовується для опису геометричних об'єктів та їх властивостей. Вона складається з квадратів змінних, а також добутків змінних. Її можна уявити як узагальнення поняття квадрата числа на випадок більшої кількості змінних.

Історична довідка. Квадратичні форми вивчаються математиками вже протягом тисячоліть. Їхні перші згадки сягають часів Давньої Греції, коли вони використовувалися для опису геометричних фігур, таких як кола, еліпси та гіперболи.

Згодом квадратичні форми знайшли застосування в інших галузях математики — алгебрі, теорії чисел та аналізі. У XVIII ст. вони стали ключовим інструментом у розвитку диференціальної геометрії, яка вивчає властивості кривих та поверхонь у просторі.

На сьогодні квадратичні форми використовуються в широкому спектрі наукових дисциплін, включаючи фізику, хімію, інженерію та економіку.

Означення 1. Квадратичною формою f від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем P називається сума, кожен член якої є або добутком однієї зі змінних, або коефіцієнти цих членів належать полю P .

Якщо коефіцієнти є дійсними числами, то квадратичну форму називають *дійсною*; якщо коефіцієнти є комплексними числами, то квадратичну форму називають *комплексною*.

Позначимо коефіцієнти при x_i^2 через a_{ii} , а коефіцієнти добутку $x_i x_j$ — через a_{ij} ($i \neq j$). Тоді при $x_i x_j$ буде коефіцієнт — a_{ij} ($i \neq j$).

Оскільки $x_i x_j = x_j x_i$, то можна записати:

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j = 2a_{ij} x_i x_j.$$

Тобто вважаємо, що коефіцієнти $a_{ij} = a_{ji}$, тому добутку $x_i x_j$ при ($i \neq j$) відповідає коефіцієнт $2a_{ij}$.

Отже, тепер квадратичну форму від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ можна записати у вигляді:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \dots + 2a_{1n} x_1 x_n + \dots + 2a_{n-1n} x_{n-1} x_n$$

або скорочено

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (1.10)$$

Із коефіцієнтів квадратичної форми побудуємо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1}^n. \quad (1.11)$$

A — матриця n -го порядку, її називають *матрицею квадратичної форми* (1.10).

Оскільки $a_{ij} = a_{ji}$, то матриця A — симетрична, тобто $A^T = A$.

Приклад:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_4 - 5x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 0 & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Означення 2. Рангом квадратичної матриці форми f називають ранг матриці цієї форми:

$$rg(f) = rg(A) = r.$$

Якщо $rg(f) = n$, то квадратичну форму f називають *не виродженою*. Якщо $r < n$, то квадратичну форму f називають *виродженою*.

Приклади:

1) розглянемо попередній приклад:

$$rg(f) = A \Rightarrow \text{квадратична форма не вироджена};$$

$$2) g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(B) = 1 \Rightarrow \text{квадратична форма вироджена}.$$

1.8.1. Матричний запис квадратичної форми

Введемо позначення:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad X^T = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \text{ — матриця квадратичної форми.}$$

Обчислимо добуток:

$$X^T A X(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n) (a_{ij})_{i,j=1}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n, \dots, a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\
&= \left((a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n)x_2 + \dots + (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)x_n \right) = \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_1x_2 + \dots + a_{n1}x_nx_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{n2}x_nx_2 + a_{1n}x_1x_n + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 = \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n,
\end{aligned}$$

у конкретному випадку ця квадратна форма при підстановці значень змінних дорівнює одному елементу з поля.

$$x_1, x_2, \dots, x_n \} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T \cdot A \cdot X. \quad (1.12)$$

Запис (1.12) називають *матричним записом квадратичної форми*.

Отже, при вивченні окремих питань, які стосуються квадратичних форм, зручно користуватися саме цим записом.

1.8.2. Приклади квадратичних форм

Рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ця формула описує всі точки на площині, які знаходяться на відстані r від заданої точки (центру кола). Змінні x та y представляють координати точки на площині, а r — радіус кола.

Рівняння еліпса:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ця формула описує всі точки на площині, які належать еліпсу. Змінні x та y представляють координати точки на площині, a та b — напівосі еліпса.

Рівняння гіперболи:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ця формула описує всі точки на площині, які належать гіперболі. Змінні x та y представляють координати точки на площині, a та b — напівосі гіперболи.

Рівняння параболі:

$$y = ax^2.$$

Ця формула описує всі точки на площині, які належать параболі. Змінна x представляє координату точки по осі x , a — коефіцієнт, який визначає форму параболі.

1.8.3. Лінійне перетворення змінних квадратичної форми

Розглянемо лінійне перетворення змінних, яке виражає змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ через $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \dots + q_{1n}y_n \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \dots + q_{2n}y_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \dots + q_{nn}y_n \end{cases} \quad (1.13)$$

Розглянемо матрицю лінійного перетворення:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

та позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тоді (1.13) можна записати скорочено:

$$X = Q \cdot Y. \quad (1.14)$$

Означення 3. Якщо $|Q| \neq 0$, то лінійне перетворення змінних називається *невиродженим*.

Має місце наступне твердження.

Лема 1. Матриця, транспонована до добутку матриць, дорівнює добутку транспонованих матриць, взятих у зворотному порядку:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \quad (1.15)$$

Доведення. Розглянемо:

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (A \cdot B) = (c_{ij}),$$

тоді

$$A^T = (a_{ji}), \quad B^T = (b_{ji}), \quad C^T = (c_{ji}),$$

причому

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Обчислимо спочатку ліву частину рівності (1.15):

$$(A \cdot B)^T = C^T = (c_{ji}) = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj})_{i,j=1}^n.$$

Для правої частини маємо:

$$B^T \cdot A^T = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^n \cdot \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \left(b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj}\right)_{i,j=1}^n = (A \cdot B)^T \Rightarrow \\ \Rightarrow (A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T.$$

З'ясуємо тепер, як змінюється матриця квадратичної форми, якщо над змінними виконати лінійне перетворення (1.13) з матрицею $Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^n$. Згідно з (1.12)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T \cdot A \cdot X, \\ X = Q \cdot Y; \quad X^T = (Q \cdot Y)^T = Y^T \cdot Q^T.$$

Отже, маємо:

$$f = (Y^T \cdot Q^T) \cdot A \cdot (Q \cdot Y) = Y^T (Q^T \cdot A \cdot Q) \cdot Y = Y^T \cdot B \cdot Y,$$

де $B = Q^T \cdot A \cdot Q$.

Залишилось довести, що матриця B симетрична, тобто $B^T = B$. Обчислимо:

$$B^T = (Q^T \cdot A \cdot Q)^T = Q^T \cdot A^T (Q^T)^T = Q^T \cdot A \cdot Q = B, \text{ (бо } A^T = A, (Q^T)^T = Q^T).$$

Висновок. При лінійному перетворенні змінних з матрицею Q , квадратична форма з матрицею A переводиться в квадратичну форму з матрицею:

$$B = Q^T \cdot A \cdot Q.$$

Нехай лінійне перетворення буде невивродженим, тобто

$$\det Q \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} Q = n.$$

Якщо $B = Q^T \cdot A \cdot Q$, то внаслідок теореми про ранг матриць можемо записати, що:

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A), \text{ якщо } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Висновок. Лінійне невиврожене перетворення змінних не змінює рангу дійсної квадратичної форми.

1.8.3.1. Визначення матриці Гессе

Додатньо та від'ємно визначена матриця Гессе. Розглянемо використання цих ознак матриці для дослідження функції на екстремум.

Матриця Гессе $H = \begin{pmatrix} O & P \\ P & Q \end{pmatrix}$ має блочну структуру та її розмірність: $(m+n) \times (m+n)$, де O — матриця розмірністю $(m \times m)$, що складається з нульових елементів; P — матриця розмірністю $(m \times m)$. Елементи цієї матриці визначаються так:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{dq_1(x)}{dx_1} & \frac{dq_1(x)}{dx_n} \\ \frac{dq_m(x)}{dx_1} & \frac{dq_m(x)}{dx_n} \end{pmatrix} - \text{транспонована матриця до } P \text{ розмірністю } (n \times m).$$

Q — матриця розмірністю $(n \times n)$ вигляду:

$$Q = \left| \frac{d^2 L(x, \lambda)}{dx_i dx_j} \right|, \text{ де } i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв'язку системи. Нехай стаціонарна точка має координати $X^+ = (x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+)$ і $\lambda^+ = (\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_n^+)$:

1. Точка X^+ є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m + 1)$, наступні $(n - m)$ головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множителем $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^+ є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m + 1)$, знак наступних $(n - m)$ головних мінорів матриці H визначається множителем $(-1)^m$.

1.8.4. Загальний запис лінійної оптимізаційної моделі.

Цільова функція та система обмежень

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ, так звана загальна задача лінійного програмування, подається у вигляді:

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1.16)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n | \leq, \geq, = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n | \leq, \geq, = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n | \leq, \geq, = b_m \end{cases} \quad (1.17)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (1.18)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють умови (1.17) і (1.18), і цільова функція (1.16) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для довільної задачі математичного програмування були введені поняття допустимого та оптимального планів.

Задачу (1.16)–(1.18) можна легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (1.17) всі b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i -те обмеження на (-1) , дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i -те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши *додаткову змінну* x_{n+1} : $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$ зводять до рівності, віднімаючи від лівої частини *додаткову змінну* x_{n+2} , тобто: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+2} = b_k$ ($x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0$).

1.9. Приклади розв'язання задач з лінійної алгебри

Для спеціальності “Інформаційні системи і технології”

Приклад. Дана система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Виписати основну матрицю коефіцієнтів A і вільний вектор b СЛАР:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Порахувати визначник матриці A методом її розкладу за рядком і за стовпцем. Розкласти за четвертим рядком, оскільки він містить 0 і одиничні коефіцієнти:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -(3 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 2) - \\ &\quad - (2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3) + \\ &\quad + 4(2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 3) = 19. \end{aligned}$$

Відповідь: 19.

3. Знайти розв'язок СЛАР за формулами Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(30 + 8 - 15 + 25 - 28 - 8) - (0 + 24 - 35 + 20 - 0 - 42) +$$

$$+ 4(0 + 60 + 28 - 16 - 63 - 0) = -19;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(84 + 40 + 8 - 24 - 14 - 80) + 4(16 + 14 + 16 - 8 - 8 - 56) +$$

$$+ 5(4 + 21 + 40 - 20 - 12 - 14) = 19;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(42 + 0 - 20 + 35 - 24 - 0) - 4(4 + 12 - 5 + 10 - 4 - 6) +$$

$$+ 4(8 + 42 + 0 - 0 - 14 - 12) = 19;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(60 + 28 + 0 - 0 - 63 - 16) - (8 + 42 + 0 - 0 - 14 - 12) +$$

$$+ 4(6 + 30 + 4 - 8 - 10 - 9) = 19.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = 1; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{|A|} = 1.$$

Відповідь: $(-1, 1, 1, 1)$.

4. Зайти розв'язок СЛАР методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання.

Записати розширену матрицю СЛАР і перетворити її:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 & | & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & | & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & | & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & | & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & | & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & | & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & | & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -13 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & | & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -7 & | & -17 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & | & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & | & -19 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає:

$$x_4 = \frac{-19}{-19} = 1;$$

$$x_3 = \frac{4 - 5 \cdot 1}{-1} = 1;$$

$$x_2 = \frac{3 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{1} = 1;$$

$$x_1 = \frac{4 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1} = -1.$$

Відповідь: $(-1, 1, 1, 1)$.

5. Знайти ранг матриці A .

Розв'язання.

Оскільки визначник матриці A відмінний від 0, то її ранг співпадає з її порядком, тобто рівний 4.

Відповідь: 4.

6. Обчислити обернену матрицю A^{-1} .

Розв'язання.

Знайти обернену матрицю методом алгебраїчних доповнень:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det A = 19.$$

Виписати алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 2 - 20 = 8,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -(12 + 10 + 4 - 6 - 2 - 40) = 22,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 2 - 8 = -4,$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 3 - 5 - 2) = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -(36 - 5 - 6 - 16) = -9,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 8 - 10 + 15 - 4 - 32 = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(8 + 6 + 5 - 24) = 5,$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 - 4 - 6 = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 60 - 5 - 6 - 16 = 33,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -(40 + 8 - 5 + 25 - 4 - 16) = -48,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 5 - 12 = 7,$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 15 - 4 - 3) = -10,$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(30 + 8 - 15 + 25 - 18 - 8) = -22,$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 16 - 15 + 50 - 12 - 8 = 51,$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 12 - 5 + 10 - 4 - 6) = -11,$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 30 + 4 - 8 - 10 - 9 = 13.$$

Виписати матрицю, транспоновану до матриці алгебраїчних доповнень:

$$A^T = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 33 & -22 \\ 22 & 1 & -48 & 51 \\ -4 & 5 & 7 & -11 \\ 3 & 1 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

Поділивши A^T на $\det A$, отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{-9}{19} & \frac{33}{19} & \frac{-22}{19} \\ \frac{22}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-48}{19} & \frac{51}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{5}{19} & \frac{7}{19} & \frac{-11}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-10}{19} & \frac{13}{19} \end{pmatrix}.$$

7. Знайти розв'язок СЛАР за допомогою оберненої матриці A^{-1} .

Розв'язання.

Візьмемо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

тоді систему можна переписати у вигляді $AX = b$. Її розв'язком буде вектор стовпець $X = A^{-1}b$. Маємо:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{-9}{19} & \frac{33}{19} & \frac{-22}{19} \\ \frac{22}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-48}{19} & \frac{51}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{5}{19} & \frac{7}{19} & \frac{-11}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-10}{19} & \frac{13}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(-1, 1, 1, 1)$.

Для спеціальності “Комп’ютерні науки”

Приклад. Дана СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Виписати матрицю коефіцієнтів A і вільний вектор b СЛАР.

Розв’язання:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначник матриці A методом її розкладу за рядком і за стовпцем.

Розв’язання. Розкласти визначник за першим рядком:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 16 + 21 - 12 = 25.$$

3. Знайти розв’язок СЛАР за формулами Крамера.

Розв’язання:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 20 + 25 - 45 = -25; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 30 + 50 - 40 - 15 = 25;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 30 - 5 - 10 - 10 = 25; \quad x = \frac{\Delta_1}{|A|} = -1, \quad y = \frac{\Delta_2}{|A|} = 1, \quad z = \frac{\Delta_3}{|A|} = 1.$$

Відповідь: $(-1; 1; 1)$.

4. Зайти розв'язок СЛАР методом Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Записати розширену матрицю СЛАР і перетворити її:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -25 & -25 \end{array} \right).$$

Звідси

$$x_3 = \frac{-25}{-25} = 1, \quad x_2 = \frac{-5 + 6 \cdot 1}{1} = 1, \quad x_1 = \frac{5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1} = -1.$$

Відповідь: $(-1; 1; 1)$.

5. Яким є ранг матриці A ?

Розв'язання. Оскільки визначник матриці A відмінний від 0, то її ранг співпадає з її порядком, тобто рівний 3.

Відповідь: 3.

6. Обчислити обернену матрицю A^{-1} .

Розв'язання. Знайти обернену матрицю методом алгебраїчних доповнень:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 25$.

Виписати алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7; & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -13; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6; & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Випишіть матрицю, транспоновану до матриці алгебраїчних доповнень:

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & -13 & 11 \\ 7 & -2 & -6 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поділивши A^* на $\det A$, отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} & \frac{-13}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-2}{25} & \frac{-6}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{8}{25} & \frac{-1}{25} \end{pmatrix}.$$

7. Знайти розв'язок СЛАР за допомогою оберненої матриці A^{-1} .

Розв'язання.

Візьмемо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

тоді систему можна переписати у вигляді $AX = b$. Її розв'язком буде вектор стовпець $X = A^{-1}b$. Маємо:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} & \frac{-13}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-2}{25} & \frac{-6}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{8}{25} & \frac{-1}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(-1; 1; 1)$.

1.10. Завдання для контрольних і самостійних робіт

Визначники матриць

Задача 1. Обчислити визначник матриці:

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix},$$

якщо коефіцієнти матриці приймають наступні значення:

№	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
1	-3	-2	4	4	-4	3	-4	5	-1	-2	-4	1	2	-4	2	-5
2	-2	-5	1	5	-1	-1	4	1	2	5	-3	1	4	3	-2	-2

№	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
3	3	-2	-2	5	-4	1	-4	-5	3	-3	-3	-3	3	1	5	2
4	3	4	1	-4	-2	4	4	-5	2	1	1	3	-3	1	4	2
5	-3	4	3	1	1	-1	-1	2	-4	4	1	2	-2	3	2	4
6	-4	-2	-1	-3	-1	-4	1	2	1	2	-5	-3	-5	-4	-2	3
7	3	-3	3	4	4	-2	2	3	3	5	1	-4	-4	1	5	1
8	1	1	4	-3	3	-4	5	-1	-4	1	2	-5	-3	-2	3	-1
9	1	3	-3	5	2	2	-1	-5	-5	-3	-1	-4	1	1	-1	-4
10	-5	-5	-3	5	-4	1	1	1	2	-5	1	-2	4	3	5	-2
11	-5	-2	-2	1	1	-5	4	5	-3	3	4	1	3	-2	-1	-4
12	-2	-1	1	2	3	3	1	-1	-5	5	-3	4	-2	2	1	-1
13	-1	1	3	4	-5	1	1	1	-5	-4	2	5	-4	3	-5	-2
14	-2	-3	-1	-2	-5	-5	5	-2	4	2	-1	2	3	1	-2	3
15	-4	5	-3	3	-3	1	-5	2	2	-4	-4	3	-5	3	1	4

Задача 2. Знайти обернену матрицю для матриці D :

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

якщо коефіцієнти матриці приймають наступні значення:

№	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	-3	4	-4	-2	-4	1	4	3	-1
2	-4	-4	-5	1	2	-2	2	-5	-5
3	5	4	5	1	1	-3	-1	2	1
4	3	1	-2	-2	3	5	-2	-2	-4
5	-4	-3	3	1	-3	1	3	-3	5
6	1	-1	4	3	-4	4	4	-2	-5
7	1	-3	2	1	-1	4	1	4	-3
8	1	-1	4	2	-1	4	1	2	1
9	-2	3	1	3	5	-1	2	-4	-3
10	-4	-1	-3	1	2	1	2	-5	-4
11	3	-3	4	1	3	-2	3	4	2
12	3	1	5	5	-4	1	1	5	-2
13	1	1	-1	4	-4	-4	-3	5	4
14	-5	3	1	-3	-1	3	-2	1	-3
15	1	-5	-1	2	-5	-4	-1	-3	1

Задача 3. Дослідити та розв'язати систему рівнянь. Знайти загальний та частковий розв'язки:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = B_2, \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = B_3 \end{cases}$$

якщо

№	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	B_1	B_2	B_3
1	3	1	-3	6	1	-2	-1	2	4	6	-4	8	12	-3	30
2	4	12	3	-8	-1	-3	5	2	10	30	-4	-20	1	6	-14
3	1	-1	-1	-2	2	-2	-2	2	9	-9	-9	0	1	8	27
4	-2	2	-2	4	5	-2	5	-10	-12	6	-12	24	-10	16	-42
5	-3	3	3	3	-2	2	-4	2	10	-10	2	-10	-15	-4	38
6	2	-2	-2	3	-1	1	1	2	-4	4	4	1	6	11	16
7	-1	-2	-1	2	5	2	5	-10	-13	-10	-13	26	-10	18	-66
8	1	1	5	-1	2	2	1	-2	1	1	-4	-1	18	0	-18
9	1	1	-2	-3	5	5	-10	2	-8	-8	16	-10	0	17	-34
10	-2	-4	4	4	-3	-1	6	6	2	-6	-4	-4	-8	-7	-2
11	-3	-6	2	-9	-1	-2	-3	-3	5	10	4	15	15	-6	-3
12	1	-1	3	-3	5	-5	15	-4	-11	11	-33	11	-7	-13	33
13	-4	-1	4	4	3	-2	-3	-3	2	-5	-2	-2	5	-12	-19
14	5	5	-1	15	1	1	-4	3	13	13	5	39	19	0	57
15	-4	-4	-12	-1	1	1	3	5	-9	-9	-27	-7	-10	12	-32

Задача 4. Розкласти вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ за векторами базису $\bar{a}_1 = (A_{11}, A_{12}, A_{13})$, $\bar{a}_2 = (A_{21}, A_{22}, A_{23})$, $\bar{a}_3 = (A_{31}, A_{32}, A_{33})$.

Задачу слід розв'язати методом Гаусса-Жордана.

№	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	-25	-20	3	-3	4	-4	-2	-4	1	4	3	-1
2	22	-8	-21	-3	5	4	4	-3	-2	-2	-5	1
3	-19	-10	-1	4	1	4	1	-3	3	2	1	-2
4	9	-7	-6	5	-4	-5	4	-3	-1	2	1	-5
5	-6	-3	-15	3	2	4	1	1	-1	5	3	-4
6	-13	4	-13	-3	1	-5	-1	1	1	1	-4	-3
7	-1	-6	8	1	1	2	3	-1	-4	2	-1	4
8	-1	22	-13	2	2	3	2	-3	4	1	-5	5
9	7	-23	10	2	-5	1	-1	-3	-2	2	-5	3

№	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
10	-10	-8	-19	-3	-5	-2	-2	2	-2	1	1	3
11	23	10	-16	5	-2	4	5	1	-3	1	1	1
12	-8	13	-26	4	1	5	-1	-4	5	3	4	4
13	-19	13	7	-3	2	-5	5	-1	-3	2	-5	1
14	0	-19	-7	1	5	1	3	-4	-4	-5	-5	-3
15	11	-2	27	2	-2	5	-5	4	-2	1	1	5

Задача 5. Знайти власні числа і цілочисельні власні вектори матриці A :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

якщо її елементи набувають наступних значень:

№	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	2	1	1	1	4	1	1	1	2
2	2	1	1	1	2	1	1	1	4
3	3	1	1	1	5	1	1	1	3
4	3	1	1	1	3	1	1	1	5
5	4	1	1	1	6	1	1	1	4
6	4	1	1	1	4	1	1	1	6
7	5	1	1	1	7	1	1	1	5
8	5	1	1	1	5	1	1	1	7
9	6	1	1	1	8	1	1	1	6
10	6	1	1	1	6	1	1	1	8
11	7	1	1	1	9	1	1	1	7
12	7	1	1	1	7	1	1	1	9
13	8	1	1	1	10	1	1	1	8
14	8	1	1	1	8	1	1	1	10
15	9	1	1	1	11	1	1	1	9

Задача 6. Крива другого порядку задана рівнянням:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Визначити тип цієї кривої, записати її канонічне рівняння і побудувати в старій системі координат:

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
1	1	-2	3	-1	0	1
2	3	-1	3	2	2	-4
3	5	12	-1	2	-2	-1
4	0	-3	0	0	1	3
5	-5	-2	1	5/2	-1/2	0
6	2	5/2	-3	-3/2	5/2	-2
7	1	-1	1	-2	-3	3
8	3	1	3	3	-1	-5
9	4	-2	1	6	-3	9
10	1	0	0	3	-4	1
11	1	1	1	-5/2	-7/2	6
12	7	2	2	-20	-16	5
13	1	-1	1	1/2	-1	3
14	1	-1	1	-5/2	-7/2	6
15	2	-3/2	-1	3/2	1	0
16	1	4	4	-3	-1	1
17	1	1	1	1	1	-4
18	8	0	-3	1	-5/2	1
19	1	-1	2	-2	-3	29
20	9	-3	1	1	0	-7
21	1	-1	0	1	1	1
22	1	1/2	1	-1	2	-12
23	9	-6	4	-8	1	0
24	1	-1	1	-2	-3	3
25	6	-2	9	-2	-16	-6
26	1	-1	-2	-2	-3	3
27	1	-1	1	1	-3	0
28	1	1	1	1	1	-4
29	9	-3	1	-3	1	0
30	1	0	1	-2	-3	0
31	0	0	2	4	6	-3
32	1	-2	4	1	-1	-1
33	5	6	0	-11	-6	-19
34	3	5	7	2	1	1
35	1	-2	2	-2	-3	3

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
36	3	-3	5	-2	-3	10
37	9	12	16	20	15	0
38	1	-1	-2	-2	-3	-13/3
39	3	1	-1	4	5	14
40	0	-1/2	1	5/2	7/2	10
41	3	-2	4	-1	-2	2
42	1	3	9	2	6	-5
43	3	-1	3	2	2	-4
44	5	2	8	-16	-28	80
45	1	-1/2	-1	-1/2	-1/2	0
46	9	-2	6	3	-4	2
47	1	3	1	3	1	-1
48	5	-3/2	1	-3/2	1	-5
49	2	-2	5	-8	0	3
50	1	-1	2	-2	-3	3
51	1	-2	3	-1	0	1
52	3	-1	3	2	2	-4
53	5	12	-1	2	-2	-1
54	0	-3	0	0	1	3
55	-5	-2	1	5/2	-1/2	0
56	2	5/2	-3	-3/2	5/2	-2
57	1	-1	1	-2	-3	3
58	3	1	3	3	-1	-5
59	4	-2	1	6	-3	9
60	1	0	0	3	-4	1
61	1	1	1	-5/2	-7/2	6
62	7	2	2	-20	-16	5
63	1	-1	1	1/2	-1	3
64	1	-1	1	-5/2	-7/2	6
65	2	-3/2	-1	3/2	1	0
66	1	4	4	-3	-1	1
67	1	1	1	1	1	-4
68	8	0	-3	1	-5/2	1
69	1	-1	2	-2	-3	29
70	9	-3	1	1	0	-7

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
71	1	-1	0	1	1	1
72	1	1/2	1	-1	2	-12
73	9	-6	4	-8	1	0
74	1	-1	1	-2	-3	3
75	6	-2	9	-2	-16	-6
76	1	-1	-2	-2	-3	3
77	1	-1	1	1	-3	0
78	1	1	1	1	1	-4
79	9	-3	1	-3	1	0
80	1	0	1	-2	-3	0
81	0	0	2	4	6	-3
82	1	-2	4	1	-1	-1
83	5	6	0	-11	-6	-19
84	3	5	7	2	1	1
85	1	-1	2	-2	-3	3
86	3	-3	5	-2	-3	10
87	9	12	16	20	15	0
88	1	-1	-2	-2	-3	-13/3
89	3	1	-1	4	5	14
90	0	-1/2	1	5/2	7/2	10
91	3	-2	4	-1	-2	2
92	1	3	9	2	6	-5
93	3	-1	3	2	2	-4
94	5	2	8	-16	-28	80
95	1	-1/2	-1	-1/2	-1/2	0
96	9	-2	6	3	-4	2
97	1	3	1	3	1	-1
98	5	-3/2	1	-3/2	1	-5
99	2	-2	5	-8	0	3
100	1	-1	2	-2	-3	3
101	0	1	3	1	-3	5
102	21	1/2	-10	0	0	0
103	1	-2	4	5	-10	25
104	1	2	4	-3	-3	0
105	4	-2	1	2	-1	1

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
106	1	1	1	-4	0	4
107	1	-1	-3	-2	-3	3
108	32	30	7	-8	-1	1
109	2	-3	5	-1	1	-10
110	0	5	-2	3	2	21
111	1	5/2	-14	0	0	0
112	1	1/2	1	-1	-2	-12
113	1	-2	3	1	-1	0
114	2	-2	1	-1	3	-3
115	0	-1/2	1	-5/2	7/2	10
116	3	1	2	3/2	-2	0
117	1	-3/2	1	0	1	1
118	3	7/2	5	2	5/2	1
119	9	-6	2	-4	0	0
120	1	0	0	-1/2	1/2	0
121	5	12	-1	2	0	1
122	2	2	-3	-1	1	-2
123	3	1	3	3	-1	-5
124	1	0	0	-1/2	-1	-3
125	3	-1	3	2	2	-4
126	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
127	3	7/2	5	2	5/2	1
128	2	5/2	-3	-3/2	-25/4	-2
129	1	-1	-3	-2	-3	3
130	1	1	1	-5/2	-7/2	6
131	2	5/2	-3	3/2	8	0
132	1	3	9	0	9	0
133	2	-1/2	-1	-15/2	-3/2	18
134	1	5/4	1	-5/2	-7/2	6
135	0	1/2	-1	-1	3/2	-1
136	3	-7/2	2	-2	3	-5
137	1	2	-	-2	-1/2	4
138	2	5/2	-3	3/2	8	-5
139	1	1/2	1	1	3/2	-3
140	6	-1/2	0	-1	2	0

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
141	2	-2	5	-4	0	6
142	1	5/3	1	-5/2	-7/2	6
143	2	2	5	-4	0	6
144	1	-1	2	-2	-3	3
145	6	-1/2	-1	5/2	1/2	2
146	2	2	3	-3/2	-3/2	0
147	1	1/2	1	1	3/2	-3
148	3	1	2	3/2	-2	0
149	1	-1	1	-2	-3	3
150	3	-7/2	2	3	-2	-5
151	0	1	3	1	-3	5
152	21	1/2	-10	0	0	0
153	1	-2	4	5	-10	25
154	1	2	4	-3	-3	0
155	4	-2	1	2	-1	1
156	1	1	1	-4	0	4
157	1	-1	-3	-2	-3	3
158	32	30	7	-8	-1	1
159	2	-3	5	-1	1	-10
160	0	5	-2	3	2	21
161	1	5/2	-14	0	0	0
162	1	1/2	1	-1	-2	-12
163	1	-2	3	1	-1	0
164	2	-2	1	-1	3	-3
165	0	-1/2	1	-5/2	7/2	10
166	3	1	2	3/2	-2	0
167	1	-3/2	1	0	1	1
168	3	7/2	5	2	5/2	1
169	9	-6	2	-4	0	0
170	1	0	0	-1/2	1/2	0
171	5	12	-1	2	0	1
172	2	2	-3	-1	1	-2
173	3	1	3	3	-1	-5
174	1	0	0	-1/2	-1	-3
175	3	-1	3	2	2	-4

№	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
176	1	0	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	0
177	3	$7/2$	5	2	$5/2$	1
178	2	$5/2$	-3	$-3/2$	$-25/4$	-2
179	1	-1	-3	-2	-3	3
180	1	1	1	$-5/2$	$-7/2$	6
181	2	$5/2$	-3	$3/2$	8	0
182	1	3	9	0	9	0
183	2	$-1/2$	-1	$-15/2$	$-3/2$	18
184	1	$5/4$	1	$-5/2$	$-7/2$	6
185	0	$1/2$	-1	-1	$3/2$	-1
186	3	$-7/2$	2	-2	3	-5
187	1	2	-	-2	$-1/2$	4
188	2	$5/2$	-3	$3/2$	8	-5
189	1	$1/2$	1	1	$3/2$	-3
190	6	$-1/2$	0	-1	2	0
191	2	-2	5	-4	0	6
192	1	$5/3$	1	$-5/2$	$-7/2$	6
193	2	2	5	-4	0	6
194	1	-1	2	-2	-3	3
195	6	$-1/2$	-1	$5/2$	$1/2$	2
196	2	2	3	$-3/2$	$-3/2$	0
197	1	$1/2$	1	1	$3/2$	-3
198	3	1	2	$3/2$	-2	0
199	1	-1	1	-2	-3	3
200	3	$-7/2$	2	3	-2	-5

1.10.1. Завдання для СРС

Завдання для самостійної роботи за темою “Визначники”

Завдання 1. (6 балів).

Квадратна матриця M називається *кососиметричною*, якщо $M = -M^T$, де M^T — матриця транспонована відносно матриці M .

Приклад:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай матриця A симетрична, матриця B кососиметрична. Відновити елементи матриць A та B , де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 5 & 1 & -4 \\ 2 & * & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & * & 3 \\ 4 & * & * \end{pmatrix}.$$

Завдання 2. (2 бали).

Який знак треба поставити перед доданком $a_{12} a_{24} a_{35} a_{43} a_{51}$ у формулі з означення визначника матриці розмірності (5×5) .

**Завдання для самостійної роботи за темою
“Системи лінійних рівнянь”**

Дослідити на лінійну залежність систему векторів:

- 1) $\bar{a} = \{1, 4, 6\}$, $\bar{b} = \{1, -1, 1\}$, $\bar{c} = \{1, 1, 3\}$;
- 2) $\bar{a} = \{2, -3, 1\}$, $\bar{b} = \{3, -1, 5\}$, $\bar{c} = \{1, -4, 3\}$;
- 3) $\bar{a} = \{5, 4, 3\}$, $\bar{b} = \{3, 3, 2\}$, $\bar{c} = \{8, 1, 3\}$;
- 4) $\bar{a} = \{1, 1, 1\}$, $\bar{b} = \{0, 1, 1\}$, $\bar{c} = \{0, 0, 1\}$.

Знайти координати вектора $\bar{x}$ в базисі $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$, якщо він заданий в базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$1) \begin{cases} \bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}; \quad \bar{x} = (6, -1, 3);$$

$$2) \begin{cases} \bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_2 = \frac{3}{2}\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}; \quad \bar{x} = (1, 2, 4);$$

$$3) \begin{cases} \bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_2 = \frac{4}{3}\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_3 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}; \quad \bar{x} = (1, 3, 6).$$

Висновки

У розділі введено поняття СЛАР. Для дослідження і розв'язання СЛАР викладено метод отримання еквівалентної системи рівнянь, що спрощує знаходження загального розв'язку системи алгебраїчних рівнянь. Для отримання еквівалентної системи рівнянь розглянуто визначники і ранги матриць. Детально і на прикладах вивчено методи Крамера і Гаусса-Жордана розв'язання СЛАР.

Контрольні запитання і завдання

1. Чому рівний визначник матриці з двома рівними рядками (стовпцями)?
2. Чим відрізняються визначники матриць розмірності 2×2 , в яких переставлено місцями стовпчики?
3. Запишіть загальний вид системи 2 лінійних рівнянь із трьома невідомими.
4. Що називається розв'язком СЛАР?
5. Що значить “розв'язати систему лінійних рівнянь”?
6. Які системи лінійних рівнянь називаються сумісними і несумісними?
7. За якої умови система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв'язок?
8. Запишіть формули Крамера для розв'язку системи лінійних рівнянь. У якому випадку вони можуть бути застосовані?
9. Як, знаючи загальний розв'язок, записати частковий розв'язок невизначеної системи?
10. Система лінійних рівнянь називається:
 - а) **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок;
 - б) **несумісною**, якщо вона не має розв'язків;
 - в) **визначеною**, якщо вона має один розв'язок;
 - г) **невизначеною**, якщо вона має нескінченну множину розв'язків;
 - д) **однорідною**, якщо всі вільні члени рівні нулю $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$;
 - е) **неоднорідною**, якщо існує $b_i \neq 0$.

Розділ 2

ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Різні арифметики для комплексних чисел (виду $a + bi$)

У системі комплексних чисел закони додавання і множення виражаються формулами:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (2.1)$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (2.2)$$

Спробуємо вивести нову систему чисел, зберігши правило додавання (2.1), але замінивши (2.2) іншим правилом множення. Нове множення має володіти наступними властивостями:

1. Множення дійсного числа a ($a = a + 0i$) на довільне число $z = b + \tilde{n}i$ повинно давати той самий результат, що й у випадку комплексних чисел, тобто:

$$(a + 0i)(b + ci) = ab + aci,$$

$$(b + ci)(a + 0i) = ab + aci.$$

Зокрема, це означає, що для дійсних чисел нове множення має співпадати зі звичайним:

$$(a + 0i)(b + 0i) = ab + 0i.$$

Оскільки це правильно і у випадку додавання, то, таким чином, дійсні числа входять у нову числову систему з їхньою природною арифметикою.

Наслідки з правил множення:

2. **Асоціативний закон.** Тобто повинна виконуватися рівність:

$$(az_1) \cdot (bz_2) = (ab) \cdot (z_1 z_2),$$

де a, b — довільні дійсні числа.

3. Повинен виконуватися **дистрибутивний закон**:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Із цих вимог випливає:

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2.$$

Тепер задамо елемент i^2 так, щоб він належав даній системі чисел, тобто, щоб він мав вигляд $p + qi$. Отже, тепер остаточно сформований закон множення матиме вигляд:

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bdp) + (ad + bc + bdq)i. \quad (2.3)$$

Теорема. Будь-яка система чисел $a + bi$ з правилами додавання та множення (2.1), (2.3) зводиться до однієї з трьох:

- 1) $a + bi, i^2 = -1$ (комплексні числа);
- 2) $a + bi, i^2 = 1$ (так звані подвійні числа);
- 3) $a + bi, i^2 = 0$ (так звані дуальні числа).

Доведення. З рівності $i^2 = p + qi$ випливає, що $i^2 - qi = p$ або:

$$\left(i - \frac{q}{2}\right)^2 = p + \frac{q^2}{4}. \quad (2.4)$$

Можливі три випадки:

1. $p + \frac{q^2}{4}$ — від'ємне число, тобто $p + \frac{q^2}{4} = -k^2$, де k — відмінне від нуля дійсне число. Тоді

$$\begin{aligned} \left(i - \frac{q}{2}\right)^2 &= -k^2, \\ \left(-\frac{q}{2k} + \frac{i}{k}\right)^2 &= -1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Позначивши число в дужках через J , будемо мати:

$$J^2 = -1.$$

При цьому $i = \frac{q}{2} + kJ$, тому будь-яке число $a + bi$ може бути записане у вигляді

$$a + bi = a + b\left(\frac{q}{2} + kJ\right) = \left(a + \frac{b}{2}q\right) + bkJ,$$

тобто число $a + bi$ допускає представлення у вигляді $a' + b'J$, де $J^2 = -1$. Це означає, що фактично маємо справу з комплексними числами [8; 9].

2. $p + \frac{q^2}{4}$ — додатне число, тобто $p + \frac{q^2}{4} = k^2$, ($k > 0$). Тоді замість формули (2.5) отримаємо:

$$\left(-\frac{q}{2k} + \frac{1}{k}i\right)^2 = 1.$$

Позначивши число в дужках через E , матимемо:

$$E^2 = 1.$$

Таким чином, будь-яке число $a + bi$ нашої системи допускає представлення у вигляді $a' + b'E$, де $E^2 = 1$. Закон множення таких чисел буде:

$$(a' + b'E)(c' + d'E) = (a'c' + b'd') + (a'd' + b'c')E.$$

Отже, при $p + \frac{q^2}{4} > 0$ отримуємо систему подвійних чисел.

3. $p + \frac{q^2}{4} = 0$. В цьому випадку, позначивши через Ω число $i - \frac{q}{2}$, матимемо

$$\Omega^2 = 0.$$

Будь-яке число $a + bi$ нашої системи може бути переписано у вигляді $\left(a + \frac{b}{2}q\right) + b\Omega$, тобто у вигляді $\tilde{a} + \tilde{b}\Omega$. Закон множення виглядає так:

$$(\tilde{a} + \tilde{b}\Omega)(\tilde{c} + \tilde{d}\Omega) = \tilde{a}\tilde{c} + (\tilde{a}\tilde{d} + \tilde{b}\tilde{c})\Omega.$$

Це — система дуальних чисел.

Отже, будь-яка система чисел з правилами дій (2.1), (2.3) фактично є однією з трьох:

- 1) комплексні числа $a + bJ, J^2 = -1$;
- 2) подвійні числа $a + bE, E^2 = 1$;
- 3) дуальні числа $a + b\Omega, \Omega^2 = 0$.

Далі системи подвійних та дуальних чисел розглядатися не будуть, оскільки в них не виконується ділення. Тож перейдемо до розгляду систем із діленням, а саме таких, в які входять більше ніж одна уявна одиниця.

2.2. Кватерніони

Добре відомо, що група кватерніонів застосовується в квантових обчисленнях. Отже, розглянемо кватерніони і їх векторне представлення.

Маємо числа виду:

$$z = a + bi + cj,$$

де a, b, c — довільні дійсні числа; i та j — уявні одиниці.

Як правило додавання для таких чисел приймається:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j.$$

Стосовно правила множення, то потрібно, щоб:

1) для дійсних чисел нове множення співпадало зі звичайним:

$$(a + 0i + 0j)(b + 0i + 0j) = ab + 0i + 0j;$$

2) добуток дійсного числа $k = k + 0i + 0j$ на довільне число $z = a + bi + cj$ повинен дорівнювати $ka + kbi + kcj$;

3) має виконуватись асоціативність множення:

$$(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1z_2),$$

де a і b — довільні дійсні числа;

4) має виконуватись дистрибутивний закон як у формі

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3,$$

так і у формі

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

Придумати закон множення, що задовольняє всі перераховані вимоги, не складає труднощів. Можна, наприклад, прийняти

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = aa' + (ab' + a'b)i + (ac' + a'c)j.$$

При такому правилі множення виконуються навіть комутативний та асоціативний закони ($z_1z_2 = z_2z_1$ і $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$), але що явно відсутнє — так це можливість ділення! Наприклад, не можна поділити 1 на i , рівняння

$$(0 + 1i + 0j)x = 1 + 0i + 0j$$

не має розв'язку.

І це не випадково. Адже при будь-якому правилі множення чисел $a + bi + cj$, яке задовольняє умови 1)–4) знайдеться принаймні одна пара чисел z_1, z_2 (причому $z_2 \neq 0$) таких, що z_1 не можна поділити на z_2 . Таким чином, із чисел виду $a + bi + cj$ побудувати систему з діленням неможливо!

Проте виявляється, що якщо приєднати ще один символ k і розглянути числа вигляду

$$a + bi + cj + dk, \tag{2.2.1}$$

то можна отримати систему з діленням. Кажучи точніше, можна так ввести множення для чисел (2.2.1), щоб, окрім вимог 1)–4), виконувалася ще й зворотна для множення дія — ділення. Найбільш цікавим прикладом для такої системи є кватерніони (“четверні” числа).

Кватерніонами називають числа виду (2.2.1) із законом додавання

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

і законом множення, що полягає в наступному:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \quad jk = i, \quad kj = -i. \tag{2.6}$$

Квадрат будь-якої уявної одиниці дорівнює -1 , добуток двох різних уявних одиниць дорівнює третьому з них зі знаком “+”, якщо від першого множника до другого будемо рухатися за годинниковою стрілкою (рис. 3), і зі знаком “-”, якщо — проти.

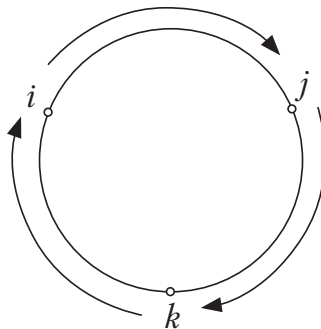


Рис. 3

Множення довільних кватерніонів виконується за допомогою правил (2.6) та з урахуванням умов 1) – 3). Нехай

$$q = a + bi + cj + dk,$$

$$q' = a' + b'i + c'j + d'k.$$

За правилом множення суми на суму (яке слідує з 3), маємо:

$$qq' = aa' + a(b'i) + a(c'j) + a(d'k) + (bi)a' + (bi)(b'i) + (bi)(c'j) + (bi)(d'k) + (cj)a' + (cj)(b'i) + (cj)(c'j) + (cj)(d'k) + (dk)a' + (dk)(b'i) + (dk)(c'j) + (dk)(d'k).$$

Отримано суму із 16 доданків. Перетворюючи кожне з них за допомогою вимог 1), 2) і таблиці множення (наприклад, $(bi)(c'j) = bc'(ij) = bc'k$), отримуємо результат:

$$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - d'c)i + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k. \quad (2.7)$$

Приклад. Нехай дано кватерніони $q_1 = 5 + 3i - j + k$ і $q_2 = 1 - i - j + 3k$. Знайдемо їх добуток:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (5 + 3i - j + k)(1 - i - j + 3k) = 5 - 5i - 5j + 15k + 3i - 3i^2 - 3ij + 9ik - \\ &- j + ji + j^2 - 3jk + k - ki - kj + 3k^2 = 5 - 5i - 5j + 15k + 3i + 3 - 3k - 9j - j - k - \\ &- 1 - 3i + k - j + i - 3 = (5 + 3 - 1 - 3) + (-5 + 3 - 9 - 3)i + (-5 - 9 - 1 - 1)j + \\ &+ (15 - 3 - 1 + 1)k = 4 - 14i - 16j + 12k. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } q_1 q_2 = 4 - 14i - 16j + 12k.$$

2.2.1. Операції над кватерніонами та їх властивості

2.2.1.1. Асоціативний закон множення кватерніонів

Теорема 1. Для множення кватерніонів справджується асоціативний закон:

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3). \quad (2.8)$$

Доведення. Оскільки кожний кватерніон q_α ($\alpha = 1, 2, 3$) можна представити як суму чотирьох доданків ($q_\alpha = a_\alpha + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k$), то ліва частина (2.8) дорівнює сумі $4 \times 4 \times 4 = 64$ доданків виду

$$(u_1 u_2) u_3, \quad (2.9)$$

де u_1 — будь-який із чотирьох доданків кватерніона q_1 ; u_2 — будь-який із доданків q_2 ; u_3 — будь-який доданок q_3 . Аналогічно права частина (2.8) дорівнює сумі 64 відповідних доданків:

$$u_1 (u_2 u_3). \quad (2.10)$$

Тому, якщо буде доведено, що кожен доданок (2.9) дорівнює відповідному доданку (2.10), то рівність (2.8) буде доведено.

Отже, усе зводиться до перевірки рівності (2.8), коли як q_1, q_2, q_3 фігурують (у будь-якій комбінації) кватерніони вигляду a, bi, cj, dk . При цьому, оскільки числовий множник можна виносити за знак добутку, то рівність (2.8) досить перевірити для випадків, коли q_1, q_2, q_3 — це будь-які з кватерніонів $1, i, j, k$; наприклад, замість

$$((bi)(cj))(b'i) = (bi)((cj)(b'i))$$

досить довести

$$(ij)i = i(ji).$$

У тих випадках, коли один із кватерніонів q_1, q_2, q_3 дорівнює 1, рівність (2.8) очевидна. Тому задача зводиться до перевірки цієї рівності для випадків, коли q_1, q_2, q_3 будь-які з кватерніонів i, j, k .

Таким чином, підлягають перевірці всього 27 рівностей. Випишемо для прикладу деякі з них:

$$(ii)i = i(ii), \quad (ij)j = i(ij), \quad (ij)i = i(ji), \quad (ij)k = i(jk).$$

Справедливість кожної із 27 рівностей слідує з таблиці множення (2.8). Отже, множення кватерніонів має асоціативну властивість.

2.2.1.2. Спряження кватерніонів

Спряженим до кватерніона $q = a + bi + cj + dk$ називається кватерніон

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk. \quad (2.11)$$

Властивості спряжених кватерніонів:

- 1) сумою спряжених кватерніонів є дійсне число;
- 2) добуток $q\bar{q}$ також є дійсним числом

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2; \quad (2.12)$$

- 3) спряжене до суми дорівнює сумі спряжених

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2; \quad (2.13)$$

4) спряжене до добутку дорівнює добутку спряжених, узятих у зворотному порядку

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1. \quad (2.14)$$

Очевидно, що сумою спряжених кватерніонів є дійсне число. Але і добуток $q\bar{q}$ також є дійсним числом, що відразу ж випливає з формули для множення (2.12):

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Нормою кватерніона q називають число

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

і позначають його $|q|$. Тоді:

$$q\bar{q} = |q|^2.$$

Така сама формула, що й для комплексних чисел.

2.2.1.3. Ділення в системі кватерніонів

Для комплексних чисел часткою від ділення z_1 на z_2 називається розв'язок рівняння $z_2 x = z_1$. Але для кватерніонів добуток залежить від порядку співмножників, тому замість одного рівняння потрібно розглядати два:

$$q_2 x_r = q_1 \quad (2.15)$$

і

$$x_l q_2 = q_1. \quad (2.16)$$

Розв'язок рівняння (2.15) називають *лівою часткою* від ділення q_1 на q_2 і позначають x_l , а розв'язок (2.16) — *правою часткою* x_r (у випадку комплексних чисел обидві частки збігаються).

Щоб розв'язати рівняння (2.15), помножимо обидві частини рівняння зліва на $\bar{q}_2$. Отримаємо $\bar{q}_2 q_2 x_l = \bar{q}_2 q_1$, або

$$|q_2|^2 x_l = \bar{q}_2 q_1.$$

Якщо тепер помножити обидві частини на дійсне число $\frac{1}{|q_2|^2}$, то матимемо

$$x_l = \frac{1}{|q_2|^2} \bar{q}_2 q_1.$$

Безпосередньою підстановкою в рівняння (2.15) переконуємося, що цей вираз дійсно є розв'язком. Таким чином,

$$x_l = \frac{1}{|q_2|^2} \bar{q}_2 q_1.$$

Аналогічно знаходиться x_r , множимо обидві частини рівняння (2.16) справа спочатку на $\bar{q}_2$, а потім на $\frac{1}{|q_2|^2}$:

$$x_r = \frac{1}{|q_2|^2} q_1 \bar{q}_2.$$

Приклад. Знайдемо ліві і праві частки від ділення k на $1 + i + k$:

$$x_l = \frac{1}{3}(1 - i - k)k = \frac{1}{3}(k + j + 1),$$

$$x_r = \frac{1}{3}k(1 - i - k) = \frac{1}{3}(k - j + 1).$$

Отже, було встановлено дві найбільш важливі властивості системи кватерніонів:

- 1) для множення кватерніонів справедливий сполучний закон;
- 2) кватерніонів — система з діленням.

2.2.2. Деякі застосування кватерніонів у векторній алгебрі

Відкриття кватерніонів у середині XIX ст. стало поштовхом до різноманітних досліджень у галузі математики та фізики. Зокрема, завдяки кватерніонам виникла надзвичайно плідна область математики — векторна алгебра.

2.2.3. Числова і векторна частини кватерніонів

Нагадаємо деякі положення відомі з геометрії. Якщо ввести в звичайному просторі прямокутну систему координат і позначити через i, j, k вектори довжини 1, що виходять з початку координат і направлені вздовж координатних осей (рис. 4), то будь-яка сума виду

$$bi + cj + dk,$$

де b, c, d — дійсні числа, буде представляти собою певний вектор. Цей вектор йде з початку координат в точку з координатами b, c, d .

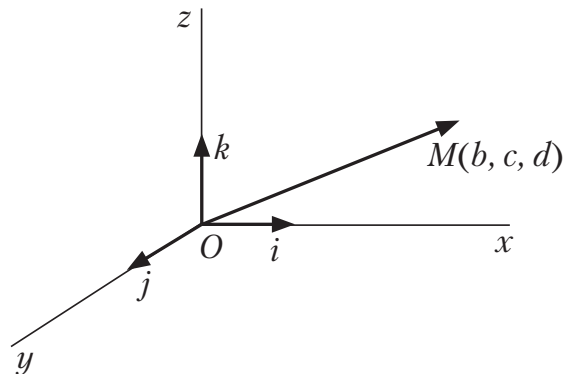


Рис. 4

Повертаючись до кватерніонів, зауважимо, що кожен кватерніон

$$q = a + bi + cj + dk$$

становить формально суму дійсного числа a з вектором $bi + cj + dk$.

Число a називають *числовою* (або *дійсною*) *частиною*, а вираз $bi + cj + dk$ — *векторною* (або *уявною*) *частиною* кватерніона q .

Розглянемо тепер два суто векторних кватерніона

$$q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k \quad \text{і} \quad q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k.$$

Перемножуючи їх за правилом множення кватерніонів, матимемо:

$$q_1 q_2 = -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k. \quad (2.17)$$

Випишемо окремо числову і векторну частини кватерніона $q_1 q_2$.

Числова частина

$$q_1 q_2 = -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2). \quad (2.18)$$

Векторна частина

$$q_1 q_2 = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k. \quad (2.19)$$

2.2.3.1. Скалярний добуток векторів, які представляють кватерніони

Кожен з виразів (2.17), (2.18) має певний геометричний зміст. Сума $b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$ дорівнює $|q_1| |q_2| \cos \varphi$, тобто добутку довжин векторів q_1 та q_2 (або модуль кватерніонів q_1 і q_2) на косинус кута між ними. Такий добуток доводиться розглядати в математиці досить часто; він носить спеціальну назву “скалярний добуток векторів q_1 та q_2 ” і позначається зазвичай (q_1, q_2) . Таким чином, за означенням,

$$(q_1, q_2) = |q_1| |q_2| \cos \varphi.$$

Теорема. Скалярний добуток векторів q_1 та q_2 дорівнює дійсній частині кватерніона $q_1 q_2$, взятого зі знаком “+”, тобто

$$(q_1, q_2) = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2. \quad (2.20)$$

Доведення. На рис. 5 зображено трикутник, побудований на векторах q_1 і q_2 . Одна з його вершин знаходиться в початку координат, дві інші вершини — точки M_1 і M_2 (кінці векторів q_1 і q_2), координати яких відповідно дорівнюють b_1, c_1, d_1 і b_2, c_2, d_2 . Маємо:

$$OM_1^2 = b_1^2 + c_1^2 + d_1^2,$$

$$OM_2^2 = b_2^2 + c_2^2 + d_2^2,$$

$$M_1 M_2^2 = (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2,$$

звідси

$$M_1 M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2).$$

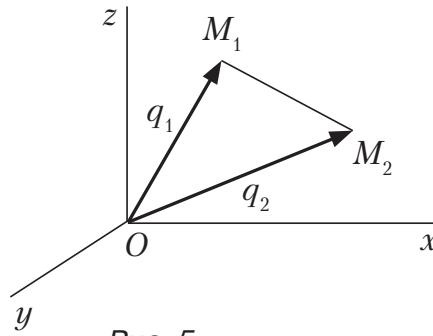


Рис. 5

Але за відомою теоремою косинусів

$$M_1 M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos \varphi,$$

де φ — кут при вершині O (кут між векторами q_1 і q_2). Порівнюючи рівності, отримуємо:

$$OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos \varphi = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2,$$

що й треба було довести.

Отже, дійсна частина добутку векторних кватерніонів q_1 і q_2 дорівнює взятому зі знаком мінус скалярному добутку q_1 на q_2 .

Якщо вектори q_1 і q_2 перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю ($\varphi = \pi/2$, $\cos \varphi = 0$), тобто дорівнює нулю і дійсна частина добутку $q_1 q_2$. У такому випадку $q_1 q_2$ буде “чистим” вектором. Обернене, звичайно, теж правильне: якщо $q_1 q_2$ — “чистий” вектор, то скалярний добуток q_1 на q_2 дорівнює нулю, значить $\cos \varphi = 0$ і вектори q_1 , q_2 перпендикулярні. Варто відмітити, що у випадку, коли q_1 і q_2 перпендикулярні, $q_1 q_2 = -q_2 q_1$; це одразу ж видно із формули (2.17), якщо врахувати, що дійсна частина $q_1 q_2$ дорівнює нулю.

2.2.3.2. Векторний добуток кватерніонів

Стосовно векторної частини добутку $q_1 q_2$, тобто виразу, що стоїть у правій частині рівності (2.18), то встановити її геометричний зміст дещо складніше. Цей вираз називають векторним добутком вектора q_1 на q_2 і позначають $[q_1, q_2]$:

$$[q_1 q_2] = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k.$$

Теорема. Векторний добуток векторів q_1 та q_2 дорівнює уявній частині кватерніона $q_1 q_2$, тобто

$$[q_1 q_2] = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k.$$

Прийmemo теорему без доведення.

Виявлені властивості вектора $[q_1, q_2]$: перпендикулярність до q_1 і q_2 , а також рівність його довжини S — ще не визначають його повністю; такі властивості мають рівно два взаємно протилежні вектори (див. рис. 6). Завершення

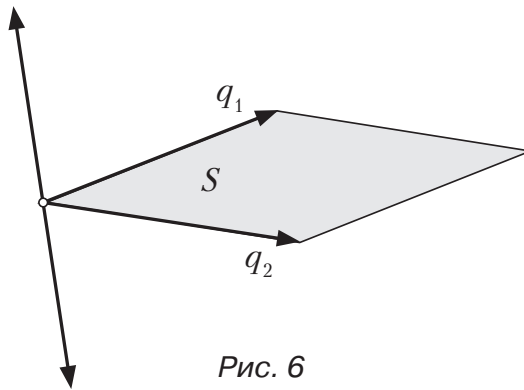


Рис. 6

опису вектора $[q_1, q_2]$ полягає в наступному: вектори $q_1, q_2, [q_1, q_2]$ орієнтовані у просторі як i, j, k .

Отже, якщо дивитися з кінця вектора $[q_1, q_2]$ на площину векторів q_1 і q_2 , то поворот на найменший кут від q_1 до q_2 буде представленим за тим самим напрямком (тобто за напрямком годинникової стрілки або проти), в якому з кінця вектора k видно поворот на найменший кут від i до j (рис. 7).

Отже, для множення суто векторних кватерніонів справедливою є формула:

$$q_1 q_2 = -(q_1, q_2) + [q_1 q_2],$$

де (q_1, q_2) — скалярний, а $[q_1 q_2]$ — векторний добуток q_1 на q_2 .

Операції скалярного і векторного множення (поряд з додаванням векторів і множенням вектора на число) висвітлено в основі цілого розділу математики — векторної алгебри, яка має численні додатки як у самій математиці, так і у фізиці (особливо в механіці).

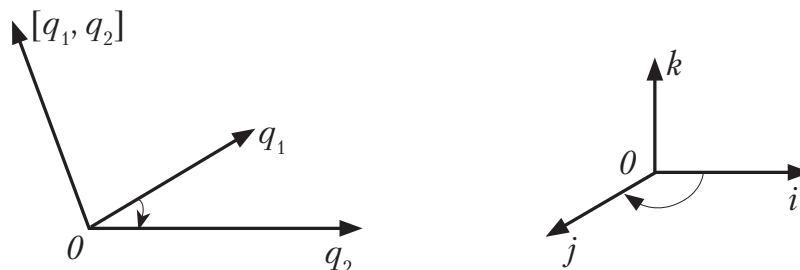


Рис. 7

2.2.3.3. Геометричний зміст множення довільного кватерніона на суто векторний кватерніон

Завдяки тому, що множення кватерніонів об'єднує в собі два види множення векторів (скалярний і векторний), кватерніони є чудовим засобом для розв'язання деяких задач геометрії та механіки.

Теорема. Якщо p — будь-який вектор довжини 1, а v — довільний вектор, перпендикулярний p , то множення v зліва на кватерніон $q = \cos \varphi + p \sin \varphi$ здійснює поворот вектора v навколо осі p на кут φ .

Доведення. Нехай

$$q = a + bi + cj + dk$$

довільний кватерніон, модуль якого дорівнює 1:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Запишемо, що

$$q = a + q',$$

де q' — вектор $bi + cj + dk$. Оскільки $|a|^2 + |q'|^2 = 1$, то існує такий кут φ , що

$$a = \cos \varphi, \quad |q'| = \sin \varphi.$$

Очевидно, $q' = |q'|p$, де p — вектор довжини 1. Отже,

$$q = \cos \varphi + p \sin \varphi.$$

Помножимо тепер кватерніон q на будь-який векторний кватерніон v перпендикулярний до p і одержимо

$$qv = (\cos \varphi + p \sin \varphi)v = v \cos \varphi + pv \sin \varphi.$$

Оскільки p і v перпендикулярні, добуток pv буде мати дійсну частину, рівну нулю; векторна ж частина буде дорівнювати $[p, v]$, тобто вектору довжиною $|p||v| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = |v|$, перпендикулярному p і v і орієнтованого щодо p і v так само, як вектор k орієнтований щодо i та j . Позначивши цей вектор через $\tilde{v}$, можна стверджувати, що $\tilde{v}$ отриманий з v поворотом навколо вектора p на $\frac{\pi}{2}$.

Отже, $qv = v \cos \varphi + \tilde{v} \sin \varphi$. Вектор qv отримуємо з v поворотом навколо осі вектора q на кут φ (рис. 8). Отже, якщо p — будь-який вектор довжини 1, а v — довільний вектор, перпендикулярний p , то множення v зліва на кватерніон

$$q = \cos \varphi + p \sin \varphi$$

здійснює поворот вектора v навколо осі p на кут φ .

До певної міри цей факт можна розглядати як геометричний зміст множення (зліва) на q ; обмеженням є те, що вектор v вибирається не довільно, а тільки перпендикулярно p .

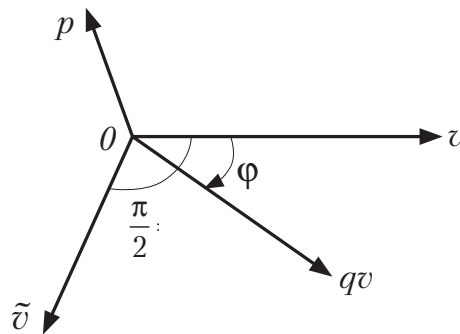


Рис. 8

2.2.3.4. Представлення довільного повороту в просторі за допомогою кватерніонів

У кватерніоновій формі можна записати і поворот навколо осі p будь-якого вектора v , але для цього доведеться ускладнити дії над v : замість множення на q зліва потрібно взяти більш складний вираз

$$qvq^{-1}.$$

Тут q^{-1} позначає кватерніон, обернений до q , тобто такий, що $qq^{-1} = 1$. Легко побачити, що

$$q^{-1} = \cos \varphi - p \sin \varphi.$$

Теорема. При повороті навколо осі p на кут 2φ довільний вектор v переходить в qvq^{-1} , де

$$q = \cos \varphi + p \sin \varphi.$$

Прийmemo теорему без доведення.

2.2.3.5. Завдання про “додавання” поворотів

Теорема. В результаті послідовного виконання двох поворотів, відповідних кватерніонів q_1 і q_2 , утворюється третій поворот, відповідний кватерніону $q_2 q_1$.

Доведення. Нехай виконується поворот на кут $2\varphi_1$ навколо деякої осі, яка характеризується одиничним вектором p_1 , слідом за ним нехай виконується інший поворот — на кут $2\varphi_2$ навколо осі, яка характеризується одиничним вектором p_2 . В результаті отримаємо деякий новий поворот (результат послідовного виконання двох даних). Знайдемо вісь і кут результуючого повороту.

При першому повороті довільний вектор v перейде у $v_1 = q_1 v q_1^{-1}$, де $q_1 = \cos \varphi_1 + p_1 \sin \varphi_1$. При другому повороті v_1 перейде у

$$v_2 = q_2 v_1 q_2^{-1} = q_2 (q_1 v q_1^{-1}) q_2^{-1} = (q_2 q_1) v (q_1 q_2)^{-1}.$$

Таким чином, унаслідок послідовного виконання двох поворотів відповідних кватерніонів q_1 і q_2 , утворюється третій поворот, відповідний кватерніону $q_2 q_1$.

Знайдемо представлення кватерніону $q_2 q_1$:

$$q_2 q_1 = \cos \Psi + p \sin \Psi, \quad (2.21)$$

де p — вектор довжини 1. Тоді результуючим поворотом є поворот навколо осі p на кут 2Ψ .

Приклад. Нехай перший поворот здійснюється навколо осі x на кут $\frac{\pi}{2}$; а другий — навколо осі y на той самий кут. Першому повороту відповідає ква-

терніон $q_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, а другому — кватерніон $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$.
У даному випадку

$$q_2 q_1 = \frac{1}{2}(1+j)(1+i) = \frac{1}{2}(1+i+j-k).$$

Щоб уявити цей кватерніон у вигляді (2.17), зауважимо, що його дійсна частина дорівнює $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$. Виходячи з цього, запишемо:

$$q_2 q_1 = \cos \frac{\pi}{3} + \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i+j-k) \right] \sin \frac{\pi}{3}.$$

Таким чином, результуюче обертання відбувається навколо вектора $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i+j-k)$ на кут $\frac{2\pi}{3}$.

2.3. Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти вісь кватерніона $q = 1 + i + j + k$ і його аргумент. Записати цей кватерніон в тригонометричній формі.

Розв'язання.

Зрозуміло, що:

$$|q| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2, \quad S(q) = 1, \quad V(q) = i + j + k, \quad |V(q)| = \sqrt{3}.$$

Орт n вектора визначаємо так: $V(q) = \sqrt{3} \cdot n$, $n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (i + j + k)$.

Згідно з формулами

$$\cos \varphi = \frac{S(q)}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \frac{q_0}{(q)}, \quad \sin \varphi = \frac{|V(q)|}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \frac{|V(q)|}{(q)}$$

маємо: $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. У межах від 0° до 360° цю умову задовольняє кут $\varphi = 60^\circ$. Таким чином, вісь кватерніона зображується у вигляді прямої OP . Орт цієї осі — вектор $\overrightarrow{ON}$, довжина якого дорівнює одиниці (рис. 9). Аргумент кватерніона q дорівнює 60° . Тригонометрична форма даного кватерніона така:

$$1 + i + j + k = 2 \left(\cos 60^\circ + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \cdot \sin 60^\circ \right).$$

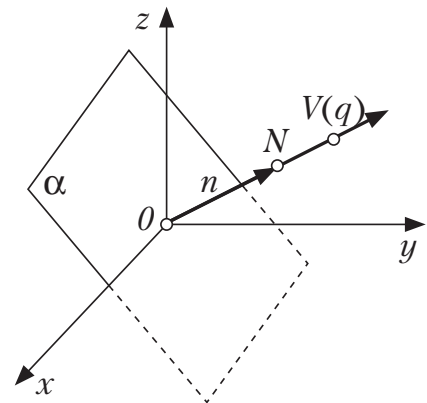


Рис. 9

Задача 2. Нехай вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 10) повертається навколо осі $\overrightarrow{OP}$ (діагональ куба) на кут $\varphi = 60^\circ$. Який вектор отримаємо в результаті такого повороту?

Розв'язання.

Скористаємось рівністю

$$b = \tau^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot \tau^{-\frac{1}{2}}, \text{ де } \tau^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} + n \cdot \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \tau^{-\frac{1}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} - n \cdot \sin \frac{\varphi}{2}, \text{ поклавши}$$

$$a = i, \quad n = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k), \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отримаємо

$$b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}(2i + 2j - k).$$

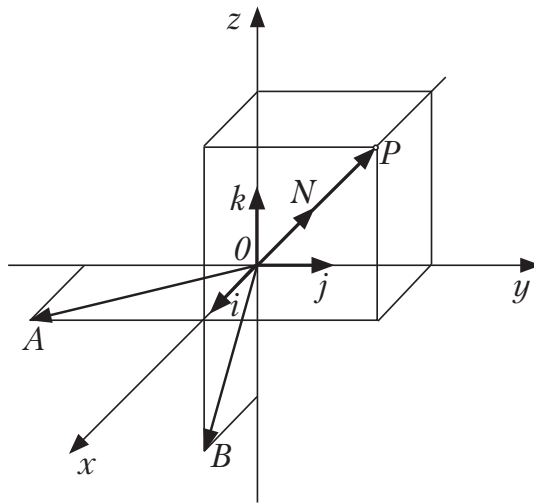


Рис. 10

Задача 3. Обчислити площу паралелограма $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \left| (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \right| = \left| (\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (3\vec{m} + 5\vec{n}) \right| = \left| 3(\vec{m} \cdot \vec{m}) + 5(\vec{m} \cdot \vec{n}) - 6(\vec{n} \cdot \vec{m}) - 10(\vec{n} \cdot \vec{n}) \right| = \\ &= \left| 5(\vec{m} \cdot \vec{n}) + 6(\vec{m} \cdot \vec{n}) \right| = 11|\vec{m} \cdot \vec{n}| = 11|\vec{m}||\vec{n}|\sin(\vec{m} \wedge \vec{n}) = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 33 \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}|.$$

Задача 4. Використовуючи скалярний добуток векторів, довести теорему косинусів: для довільного трикутника ABC , $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

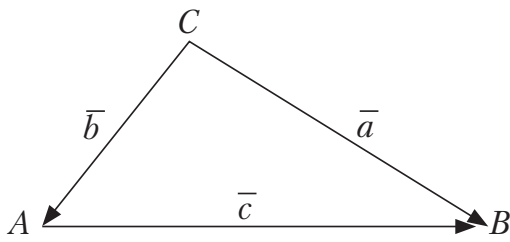


Рис. 11

Для будь-яких точок A, B, C має місце рівність трикутника

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Тому, використовуючи означення та властивості скалярного добутку,

$$\begin{aligned} c^2 &= |\overline{AB}|^2 = \overline{AB}^2 = (\overline{AC} + \overline{CB})^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{CB}^2 = \\ &= |\overline{AC}|^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{CB} + |\overline{CB}|^2 = |\overline{CB}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2|\overline{CA}||\overline{CB}|\cos(\widehat{CA, CB}) = \\ &= a^2 + b^2 - ab\cos\hat{C}. \end{aligned}$$

Задача 5. Знайти три сили $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, які прикладені до однієї точки і мають взаємно перпендикулярні напрямки. Визначити абсолютну величину їх рівнодійної $\vec{r}$, якщо $|\vec{f}_1| = 2H, |\vec{f}_2| = 2H, |\vec{f}_3| = 3H$.

Розв'язання.

Оскільки $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ взаємно перпендикулярні, то в ортонормованому базисі $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орти $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, $\vec{f}_1 = (2; 0; 0), \vec{f}_2 = (0; 2; 0), \vec{f}_3 = (0; 0; 1)$. Тоді $\vec{r} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = (2; 2; 1)$.

$$|\vec{r}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3.$$

Відповідь: $|\vec{r}| = 3H$.

Висновки

Розглянуто процес розширення поняття “число” шляхом введення уявних одиниць та надання цим уявним одиницям певних властивостей. Було доведено, що всі числа виду $a + bi$ можуть належати тільки до системи комплексних, подвійних або дуальних чисел. Виведені системи чисел було досліджено на властивості операцій над числами. Таким чином, виявлено, що у системах подвійних та дуальних чисел не виконується ділення. Розглянуто систему кватерніонів з трьома уявними одиницями, виявлено, що у ній не виконується комутативний закон множення. Отже, процес розширення числових систем не є нескінченним, бо, збільшуючи кількість уявних одиниць, поступово втрачаються основні властивості операцій над числами.

Однак ці об'єкти теж цікаві з математичної точки зору, оскільки завдяки кватерніонам виникла векторна алгебра, яка має численні додатки як у самій математиці, так і у фізиці й особливо в квантовій механіці, завдяки чому з'являються застосування у квантових комп'ютерних системах. З'явилися поняття скалярного та векторного добутків, стало можливим представлення довільного повороту в тривимірному просторі. Тобто кватерніони є одним із засобів розв'язання багатьох задач геометрії та механіки.

Розділ 3

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Аналітична геометрія на площині

3.1.1. Прямокутна система координат

Аналітична геометрія — область математики, яка вивчає геометричні образи алгебраїчними методами, проводячи аналітичні викладки та перетворення. При цьому геометричні образи розглядаються у деякій системі координат, яка визначає лінійний векторний простір. Означення та властивості векторного простору детально викладено у розділі 3. Слід зауважити, що одна з найпростіших систем є декартова прямокутна система координат. На площині така система координат задається двома взаємно перпендикулярними осями Ox та Oy (рис. 12).

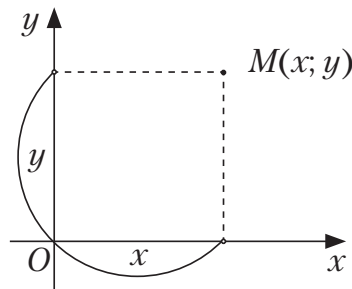


Рис. 12

Вісь Ox називається віссю абсцис, а вісь Oy — віссю ординат. Точка O перетину осей називається початком координат. Площина, на якій розміщені осі Ox та Oy , називається координатною площиною й позначається Oxy .

Будь-яка точка на площині характеризується єдиним вектором (x, y) . І навпаки будь-яка впорядкована пара чисел (будь-який вектор) визначає на площині єдину точку. Така пара чисел називається координатами точки M . Перше число цієї пари називається абсцисою точки, а друге — ординатою. Той факт, що точка M має координати x та y , позначається так: $M(x, y)$.

Розглянемо прості задачі аналітичної геометрії на площині.

Відстань d між точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ (див. рис. 13) визначається рівністю

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Площа трикутника, вершинами якого є три точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$, визначається формулою:

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

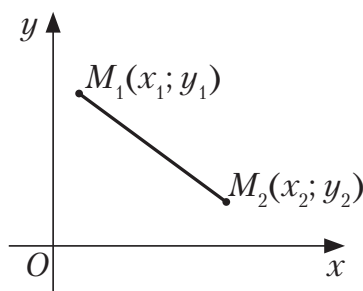


Рис. 13

Поділ відрізка у пропорційному відношенні. Нехай координатами кінців відрізка є $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$. Тоді координати точки $M_3(x_3; y_3)$, для якої справедливе співвідношення $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, визначаються рівностями:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3.1)$$

Якщо ж точка $M(x; y)$ ділитиме відрізок навпіл, то $\lambda = 1$ і координати точки, що є серединою відрізка, матимуть вигляд:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (3.2)$$

Приклад 1. Знайти площу трикутника, вершини якого мають такі координати:

$A(2; 0)$, $B(6; 5)$, $C(4; 2)$.

Розв'язання.

Згідно з формулою площі трикутника за трьома точками, маємо:

$$S = \frac{1}{2} |(6-2)(2-0) - (4-2)(5-0)| = \frac{1}{2} |8-10| = 1.$$

Приклад 2. Знайти точку $M(x; y)$, яка у два рази ближче до точки $M_1(2; 2)$, ніж до точки $M_2(8; 14)$.

Розв'язання. Точка $M(x; y)$ ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = 0,5$. Використовуючи формулу (3.1), маємо:

$$x = \frac{2 + 0,5 \cdot 8}{1,5} = 4, \quad y = \frac{2 + 0,5 \cdot 14}{1,5} = 6.$$

Якщо обчислити координату x у звичайних дробах, то матимемо:

$$x = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 8}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2 + 4}{\frac{3}{2}} = \frac{2(2+4)}{3} = \frac{12}{3} = 4, \quad y = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 14}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2 + 7}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6.$$

3.1.2. Полярні координати

У разі прямокутної системи координат існує взаємно однозначна відповідність між парою дійсних чисел та точками на площині. Виявляється, що така взаємно однозначна відповідність має місце і в інших системах. Найбільш важливою після прямокутної є полярна система координат. Вона містить деяку точку O , яка називається полюсом, та промінь OE , який називається полярною віссю. Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання відрізків рис. 14.

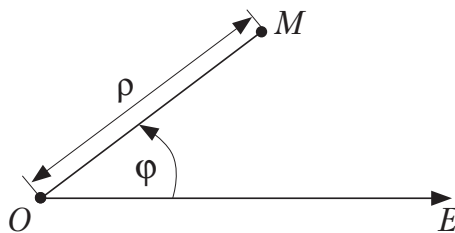


Рис. 14

Нехай задана полярна система координат і нехай M — довільна точка площини. Тоді ρ — відстань від точки M до полюса O ; φ — кут, на який необхідно повернути полярну вісь навколо полюса O проти годинникової стрілки до співпадання з променем OM .

Полярними координатами точки M будемо називати пару чисел ρ та φ . При цьому ρ вважається першою координатою і називається полярним радіусом, а φ — другою координатою і називається полярним кутом.

Полярний радіус є невід'ємним числом: $0 \leq \rho < \infty$, а полярний кут зазвичай змінюється у таких межах: $0 \leq \varphi < 2\pi$. У цьому разі також існує взаємно однозначна відповідність між будь-якою точкою на площині та парою чисел (ρ, φ) . Однак поворот осі до точки M може здійснюватись також за годинниковою стрілкою. У цьому випадку полярний кут буде від'ємним.

Очевидно, що для довільної точки площини кут визначається з точністю до періоду 2π , тобто, якщо повернути промінь OM навколо полюса O на кут 2π і кратний йому як за годинниковою стрілкою, так і проти неї, то точка M після повороту попаде у початкове положення.

Перехід від полярної системи координат до прямокутної здійснюється за формулами (рис. 15):

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \quad (3.3)$$

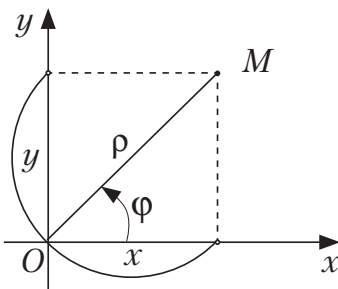


Рис. 15

а від прямокутної до полярної — за формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (3.4)$$

Відмітимо, що рівність $\operatorname{tg} \varphi = x/y$ визначає два значення полярного кута на проміжку $0 \leq \varphi < 2\pi$. Із цих двох значень кута φ необхідно вибрати той, що задовольняв би рівності (3.3). Знайти φ можна так, нехай $\operatorname{tg} \varphi = k$, тоді

$$\varphi = \operatorname{arctg}(k) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\varphi)) = \varphi.$$

Приклад. Знайти полярні координати точок, якщо їхні прямокутні координати визначаються парами чисел $P(1, 1)$, $M(-1, -1)$.

Розв'язання.

Згідно з формулами (3.4) маємо для першої точки такі рівності:

$$\rho = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1.$$

Рівність $\operatorname{tg} \varphi = 1$ на проміжку $0 \leq \varphi < 2\pi$ визначає два значення кута: $\varphi_1 = \pi/4$ та $\varphi_2 = 5\pi/4$. Оскільки $\sin(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, $\cos(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, то рівності (3.3) для точки з координатами $(1, 1)$ і цього кута не виконуються, а для кута $\pi/4$ маємо $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ і тому рівності (3.3) виконуються $x = \rho \cos \varphi_1 = \sqrt{2} \cos(\pi/4) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Тому полярними координатами першої точки є $(\sqrt{2}, \pi/4)$. Для знаходження полярних координат другої точки $(-1, -1)$ одержимо ті ж рівності $\rho = \sqrt{2}$ і $\operatorname{tg} \varphi = 1$. У цьому випадку рівність (3.3) визначає, що за полярний кут необхідно взяти кут $\varphi_2 = 5\pi/4$. Отже, її полярними координатами є пара чисел $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$.

3.1.3. Рівняння лінії на площині

Розглянемо співвідношення вигляду

$$F(x, y) = 0, \quad (3.5)$$

що пов'язує змінні x та y в прямокутній системі координат. Рівність (3.5) будемо називати рівнянням з двома змінними x та y , якщо ця рівність буде виконуватись для всіх x та y .

Означення. Рівняння (3.5) називається рівнянням лінії l на площині в заданій прямокутній системі координат, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x та y довільної точки, яка лежить на цій лінії l та не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на лінії l .

$$F(x, y) = 0, \quad M(x, y) \in l, \quad F(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0, \quad \tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}) \notin l. \quad (3.6)$$

З означення випливає, що лінія l є сукупністю усіх тих точок на площині, координати яких задовольняють рівнянню (3.5). Отже, рівняння (3.5) визначає лінію l .

Лінія l може представлятись рівнянням

$$F(\rho, \varphi) = 0, \quad (3.7)$$

де $(\rho; \varphi)$ — полярні координати точки.

Задача 1. Задано точки $M_1(3; -3)$, $M_2(3; 0)$, $M_3(1; -1)$, $M_4(-2; 3)$. Встановити, які із цих точок лежать на лінії, що визначається рівнянням $x + y = 0$, а які не лежать на ній.

Задача 2. Встановити, які лінії визначаються рівняннями та побудувати їх:

1) $x^2 - y^2 = 0$; 2) $x - y = 0$; 3) $x^2 + y^2 = 0$;

4) а) $\rho - a \cos \varphi = 0$; б) $\rho = a\varphi$,

де $a > 0$, змінні ρ , φ — полярні координати.

Задача 3. Вивести рівняння кола радіуса R з центром у точці (a, b) .

3.1.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k

$$y = kx + b, \quad (3.8)$$

де кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі Ox і називається *кутовим коефіцієнтом* $k = \operatorname{tg}(\varphi)$; b — ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_1; y_1)$ із заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (3.9)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.10)$$

Якщо абсциса або ордината цих різних точок співпадає, то рівняння прямої матиме вигляд: $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$.

Загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.11)$$

де A, B, C — довільні коефіцієнти (A і B одночасно не дорівнюють нулю). Коефіцієнти A і B є також координатами вектора $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярного до прямої (вектора нормалі прямої).

Рівняння виводиться наступним чином:

$$\begin{aligned}A(x - x_1) + B(y - y_1) &= 0, \\Ax + By - Ax_1 - By_1 &= 0, \\Ax + By + C &= 0,\end{aligned}$$

де $C = -Ax_1 - By_1$.

Частинні випадки загального рівняння:

1) при $C = 0, B \neq 0$. $y = -\frac{A}{B}x$, пряма проходить через початок координат;

2) при $B = 0, A \neq 0$. $x = -\frac{C}{A} = a$, пряма паралельна осі Oy ;

3) при $A = 0, B \neq 0$. $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$, $y = -\frac{C}{B} = b$, пряма паралельна осі Ox ;

4) при $B = C = 0$, пряма є віссю Oy ;

5) при $A = C = 0$. $y = 0$, пряма є віссю Ox .

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(3; 1)$ та $M_2(5; 4)$. Рівняння через дві точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ у даному випадку має вигляд $\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 1}{4 - 1}$.

Розв'язування.

У цьому випадку маємо $x_1 = 3, y_1 = 1, x_2 = 5, y_2 = 4$. Підставивши їх у рівність (3.10), отримаємо $\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 1}{4 - 1}$ або $\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{3}$, або $3x - 2y - 7 = 0$.

3.1.5. Кут між двома прямими

Якщо відомі кутові коефіцієнти двох прямих k_1 і k_2 , то один із кутів α між ними визначається рівністю

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (3.12)$$

Другий кут між прямими дорівнює $\pi - \alpha$.

Умова паралельності двох прямих: $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Якщо дві прямі задаються рівнянням у загальній формі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то один із кутів між цими прямими визначається кутом між двома нормальними до них: $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ та $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$, а кут між нормальними визначається за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих визначається умовою паралельності їхніх нормалей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих визначається умовою перпендикулярності їхніх нормалей: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.1.6. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої

Нехай на площині xOy дана пряма. Проведемо через початок координат перпендикуляр до цієї прямої і назвемо його нормою. Позначимо через P точку перетину нормалі з даною прямою і встановимо позитивний напрям нормалі від точки O до точки P .

Якщо α — полярний кут нормалі, p — довжина відрізка OP (рис. 16), то рівняння цієї прямої може бути записано у вигляді

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Рівняння цього виду називається нормальним.

Нехай дано яку-небудь пряму і довільну точку M^* . Позначимо через d відстань від точки M^* до цієї прямої. Відхиленням δ точки M^* від прямої називається число $+d$, якщо дана точка і початок координат лежать по різні боки від даної прямої, і $-d$, якщо ця точка і початок координат розташовані по один бік від даної прямої. (Для точок, що лежать на самій прямій, $\delta = 0$.) Якщо дано координати x^*, y^* точки M^* і нормальне рівняння прямої

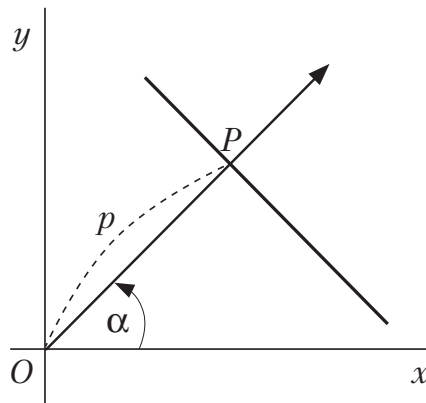


Рис. 16

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, то відхилення δ точки M^* від цієї прямої може бути обчислено за формулою:

$$\delta = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p.$$

Таким чином, щоб знайти відхилення якої-небудь точки M^* від даної прямої, потрібно в ліву частину нормального рівняння цієї прямої замість поточних координат підставити координати точки M^* . Отримане число дорівнюватиме шуканому відхиленню.

Щоб знайти відстань d від точки до прямої, достатньо обчислити відхилення і взяти його модуль: $d = |\delta|$.

Якщо дано загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, то щоб привести його до нормального вигляду, потрібно всі члени цього рівняння помножити на нормувальний множник μ , який визначається формулою

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак множника, що нормує, вибирають протилежним до знака вільного члена рівняння, що нормується.

Завдання.

1. Визначити, які з наступних рівнянь прямих є нормальними:

1) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$;

2) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$;

3) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$;

4) $-\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 2 = 0$;

5) $-x + 2 = 0$;

6) $x - 2 = 0$;

7) $y + 2 = 0$;

8) $-y - 2 = 0$.

2. Привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду в кожному із таких випадків:

1) $4x - 3y - 12 = 0$;

2) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$;

3) $12x - 5y + 13 = 0$;

4) $x + 2 = 0$;

5) $2x - y - \sqrt{5} = 0$.

3. Дано рівняння прямих. Визначити полярний кут нормалі α і відрізок p для кожної із даних прямих: за отриманими значеннями параметрів α і p побудувати ці прямі на рисунку (в останніх двох випадках побудову прямої виконати, вважаючи $\beta = 30^\circ$ і $q = 2$):

- 1) $x - 2 = 0$;
- 2) $x + 2 = 0$;
- 3) $y - 3 = 0$;
- 4) $y + 3 = 0$;
- 5) $x\sqrt{3} + y - 6 = 0$;
- 6) $x - y + 2 = 0$;
- 7) $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$;
- 8) $x \cos \beta - y \sin \beta - q = 0$, $q > 0$, β – гострий кут;
- 9) $x \cos \beta + y \sin \beta + q = 0$, $q > 0$, β – гострий кут.

4. Обчислити величину відхилення δ і відстань d від точки до прямої в кожному з таких випадків:

- 1) $A(2; -1)$, $4x + 3y + 10 = 0$;
- 2) $B(0; -3)$, $5x - 12y - 23 = 0$;
- 3) $P(-2; 3)$, $3x + 4y - 2 = 0$;
- 4) $Q(1; -2)$, $x - 2y - 5 = 0$.

5. Встановити, чи лежать точка $M(1; -3)$ і початок координат по один або різні боки кожної з наступних прямих:

- 1) $2x - y + 5 = 0$;
- 2) $x - 3y - 5 = 0$;
- 3) $3x + 2y - 1 = 0$;
- 4) $x - 3y + 2 = 0$;
- 5) $10x + 24y + 15 = 0$.

6. Точка $A(2; -5)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрата.

7. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ і одна з його вершин $A(-2; 1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

8. Довести, що пряма $2x + y + 3 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $A(-5; 1)$, $B(3; 7)$.

9. Довести, що пряма $2x - 3y + 6 = 0$ не перетинає відрізка, обмеженого точками $M_1(-2; -3)$, $M_2(1; -2)$.

10. Послідовні вершини чотирикутника суть точки $A(-1; 6)$, $B(-1; -4)$, $C(7; -1)$, $D(2; 9)$. Установити, чи є цей чотирикутник опуклим.

11. Послідовні вершини чотирикутника суть точки $A(-1; 6)$, $B(1; -3)$, $C(4; 10)$, $D(9; 0)$. Установіть, чи є цей чотирикутник опуклим.

12. Дано вершини трикутника $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C .

13. Сторони AB , BC , CA трикутника ABC , відповідно дані рівняннями $x + 21y - 22 = 0$, $5x - 12y + 7 = 0$, $4x - 33y + 146 = 0$. Обчислити відстань від центру мас цього трикутника до сторони BC .

14. Обчислити відстань d між паралельними прямими в кожному з таких випадків:

1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;

2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;

3) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;

4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.

15. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Обчислити його площу.

16. Довести, що пряма $5x - 2y - 1 = 0$ паралельна прямим $5x - 2y + 7 = 0$, $5x - 2y - 9 = 0$ і ділить відстань між ними навпіл.

17. Дано паралельні прямі $10x + 15y - 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$. Установити, що перша з них лежить між двома іншими, і обчислити відношення, в якому вона ділить відстань між ними.

18. Довести, що через точку $P(2; 7)$ можна провести дві прямі так, щоб їхні відстані від точки $Q(1; 2)$ дорівнювали 5. Скласти рівняння цих прямих.

19. Довести, що через точку $P(2; 5)$ можна провести дві прямі так, щоб їхні відстані від точки $Q(5; 1)$ дорівнювали 3. Скласти рівняння цих прямих.

20. Довести, що через точку $C(7; -2)$ можна провести тільки одну пряму так, щоб відстань її від точки $A(4; -6)$ дорівнювала 5. Скласти її рівняння.

21. Довести, що через точку $B(4; -5)$ неможливо провести пряму, щоб відстань від точки $C(-2; 3)$ дорівнювала 12.

22. Вивести рівняння геометричного місця точок, відхилення яких від прямих $8x - 15y - 25 = 0$ дорівнює -2 .

23. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $3x - 4y - 10 = 0$ і віддалені від неї на відстань $d = 3$.

24. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(2; 0)$ і $B(-1; 4)$. Скласти рівняння його сторін.

25. Точка $A(5; -1)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $4x - 3y - 7 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони цього квадрата.

26. Дано рівняння двох сторін квадрата $4x - 3y + 3 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$ і одна з його вершин $A(2; -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього квадрата.

27. Дано рівняння двох сторін квадрата $5x + 12y - 10 = 0$, $5x + 12y + 29 = 0$. Скласти рівняння двох інших його сторін за умови, що точка $M_1(-3; 5)$ лежить на стороні цього квадрата.

28. Відхилення точки M від прямих $5x - 12y - 13 = 0$, $3x - 4y - 19 = 0$ дорівнюють відповідно -3 і -5 . Визначити координати точки M .

3.2. Векторні величини

У повсякденній практиці маємо справу з величинами двох видів. Одні з цих величин такі, як температура, час, маса, довжина, площа, робота тощо можна визначити одним числовим значенням, інші ж величини, такі, як сила, швидкість, прискорення тощо можна визначити тільки тоді, коли відомо не тільки їх числове значення, а й напрям у просторі. Величини першого виду називають **скалярними величинами** або **скалярами**. Величини другого виду називають **векторними величинами**.

Кожну векторну величину геометрично можна зобразити напрямленим прямолінійним відрізком — **вектором**, довжина якого дорівнює числовому значенню векторної величини (у вибраному масштабі) і напрям співпадає з напрямом цієї величини.

Вектор визначають двома точками: перша — це початок його, друга — кінець; додатний напрям вектора — від початку до кінцевої точки, наприклад, вектор $\overline{AB}$ має початок у точці A і кінець у точці B , стрілка вказує напрям вектора.

Якщо початок і кінець вектора співпадають, то вектор називають **нульовим** (нуль-вектор).

Два ненульових вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називають **колінеарними**, якщо прямі AB і CD паралельні або співпадають.

Вектори називають **компланарними**, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Довжина, або **модуль**, вектора $\overline{AB}$ — це відстань між його початком A і кінцем (довжина відрізка AB). Для модуля вектора $\overline{AB}$ використовують позначення $|\overline{AB}|$ або $|\overline{AB}| = |\overline{a}|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають **одиничний вектор** або **орт**.

Вектори рівні, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і рівні модулі.

На рис. 17, де $ABCD$ є паралелограмом, зображено рівні вектори $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не рівні. Хоч ці вектори і колінеарні, і мають рівні модулі, але вони протилежно напрямлені, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

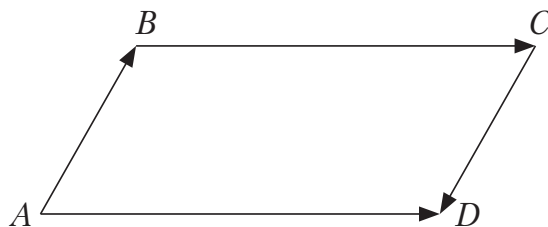


Рис. 17

Вектори можна додавати, віднімати, множити на число.

Додавання двох векторів — це операція побудови за двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ третього вектора — вектора суми $\vec{c}$ (рис. 18).

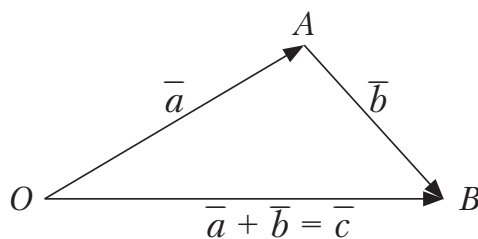


Рис. 18

Цю побудову виконуємо так: 1) з довільної точки O відкладаємо вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; 2) з його кінця A відкладаємо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; 3) з'єднаємо початок O першого вектора з кінцем B другого. Знайдений в результаті цієї побудови вектор $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ називають вектором-сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, див. рис. 18.

Означення. Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є $\vec{c}$ вектор, що сполучає початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$.

3.3. Скалярний добуток і його властивості

Означення 1. Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добуткові їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначається символом $(\vec{a}, \vec{b})$ або $\vec{a} \cdot \vec{b}$; абсолютна величина позначається $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$ та обчислюється за формулою, якщо

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\},$$

то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{і} \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Отже, на основі означення отримаємо формулу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Позначимо проєкцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ як $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Оскільки $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$, $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$,

то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

$$\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Основні властивості скалярного добутку:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- 2) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;
- 4) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$;
- 5) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$ або один із них, або обидва є нульовим вектором.

3.4. Векторний добуток векторів

3.4.1. Векторний добуток векторів і його властивості

Означення. Три вектори називаються *впорядкованою трійкою* (або просто трійкою), якщо вказано, який із цих векторів являється першим, який — другим, і який — третім.

Означення. Трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *правою* (*лівою*), якщо виконується одна з наступних трьох умов:

1) якщо вектори зведені до спільного початку і розміщені так, що можуть бути розташовані відповідно великий, не зігнутий вказівний і середній пальці правої (лівої) руки;

2) якщо після зведення до спільного початку вектор $\vec{c}$ розташований по ту сторону від площини, яка визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, звідки найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснюється проти часової стрілки (за часовою стрілкою);

3) якщо, знаходячись всередині внутрішнього кута, утвореного приведенням до спільного початку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, відбувається поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ і від нього до $\vec{c}$, що здійснюється проти часової стрілки (за часовою стрілкою).

Означення. *Афінна або декартова система координат* називається *правою (лівою)*, якщо три базисних вектора утворюють праву (ліву) трійку.

Означення. *Векторним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається $\vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє умовам:

- 1) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 2) довжина $|\vec{a} \times \vec{b}|$ вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin \varphi$, де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ (рис. 19).

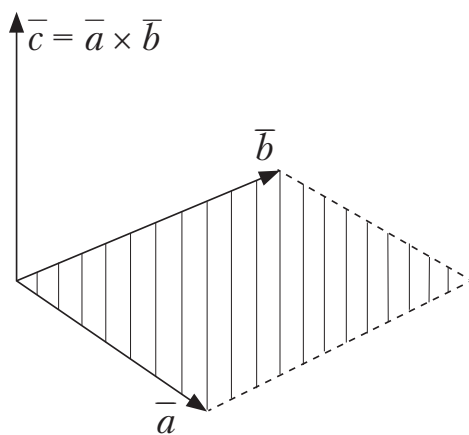


Рис. 19

Основні властивості векторного добутку:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (векторний добуток залежить від послідовності співмножників);
- 2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times (\lambda\vec{b})$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
- 4) векторний добуток дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні (паралельні) або хоча б один із них нульовий, тобто $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Формула вираження векторного добутку через координати співмножників має вигляд:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Приклад. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$. Знайти векторний добуток векторів $\vec{AB} \times \vec{BC}$.

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{BC}$. $\overline{AB} = \{-1; 3; -4\}$, $\overline{BC} = \{2; 0; 2\}$:

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Отже, $\overline{AB} \times \overline{BC} = \{6; -4; -6\}$.

Відповідь: Векторний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{BC}$ дорівнює $\{6; -4; -6\}$.

3.4.2. Застосування векторного добутку векторів

Розглянемо задачі, в яких при їх розв'язанні застосовується векторний добуток векторів.

Задача 1. Обчислення площі паралелограма. Згідно з властивостями площа паралелограма дорівнює добуткові його суміжних сторін на синус кута між ними, тобто $S = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \sin\varphi = |\bar{a} \times \bar{b}|$, тому можна вивести формулу для обчислення площі паралелограма:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) є формулою для **обчислення площі паралелограма**.

З обчислення площі паралелограма знаходимо формулу обчислення площі трикутника, вона буде дорівнювати половині площі паралелограма, тобто

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|. \quad (3.15)$$

Формула (3.15) є формулою для **обчислення площі трикутника**.

Приклад 1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\bar{a} = \left\{1; 0; -\frac{1}{4}\right\}, \quad \bar{b} = \{4; -12; -5\}.$$

Розв'язання.

Застосовуючи формулу (3.14), отримаємо:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -12 & -5 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 4\bar{j} - 12\bar{k}.$$

$\bar{a} \times \bar{b} = \{-3; 4; -12\}$. Тому площа дорівнює:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: Площа паралелограма дорівнює 13 (кв. од.).

Приклад 2. Знайти площу трикутника з вершинами у точках $A(1; 2; 1)$, $B(4; 3; 2)$, $C(2; 4; 4)$.

Розв'язання.

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{3; 1; 1\}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{1; 2; 3\}$. Знаходимо $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 64 + 25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Площа трикутника $\triangle ABC$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} = \frac{3}{2} \sqrt{10} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: Площа $\triangle ABC$ дорівнює $\frac{3}{2} \sqrt{10}$ (кв. од.).

Задача 2. Обчислення моменту сили. Якщо вектор $\vec{F}$ зображує силу, прикладену до точки M , а вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ є моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O , тобто

$$\text{mom}_O \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \quad (3.16)$$

Формула (3.16) є формулою для **обчислення моменту сил**.

Приклад 3. Сила $\vec{F} = \{1; -2; 4\}$ прикладена до точки $M(1; 2; 3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $A(3; 2; -1)$.

Розв'язання.

Знаходимо координати вектора $\overrightarrow{AM} = \{-2; 0; 4\}$ і, застосовуючи формулу (3.13), отримуємо:

$$\text{mom}_A \vec{F} = \overrightarrow{AM} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$\text{mom}_A \vec{F} = (8; 12; 4).$$

Відповідь: Момент сили дорівнює $\text{mom}_A \vec{F} = (8; 12; 4)$.

3.5. Мішаний добуток трьох векторів

3.5.1. Визначення мішаного добутку трьох векторів і його властивості

Нехай дано три довільні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Якщо вектор $\vec{a}$ векторно помножити на вектор $\vec{b}$, а потім вектор, який отримаємо при цьому $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно

помножити на вектор $\vec{c}$, то в результаті отримаємо число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, яке називається **мішаним добутком векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

На геометричне тлумачення мішаного добутку векторів вказує наступна теорема.

Теорема. Мішаний добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятих зі знаком "+", якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — права, і зі знаком "-", якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ліва.
Якщо ж вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ дорівнює нулеві.

Доведення. Припустимо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарні. Тоді $\text{Pr}_{\vec{a}\vec{b}}\vec{c} = h$ з точністю до знака дорівнює висоті h паралелепіпеда, побудованого на зведених до спільного початку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ за умови, що основою служить паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Отже **об'єм паралелепіпеда** обчислюється за формулою (рис. 20):

$$V = S \cdot h = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \quad (3.17)$$

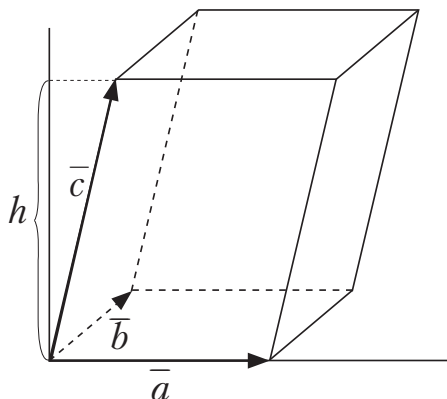


Рис. 20

Основні властивості мішаного добутку:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;
- 2) якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вектори компланарні;
- 3) мішаний добуток трьох векторів, два з яких співпадають, дорівнює нулеві.

3.5.2. Обчислення мішаного добутку через координати векторів

Нехай дано координати векторів

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\},$$

тоді мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Формула (3.18) – формула мішаного добутку, який заданий своїми координатами.

3.5.3. Умова компланарності трьох векторів

Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні, то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$, тобто

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (3.19)$$

Приклад 1. Знайти мішаний добуток векторів:

$$\bar{a} = \{3; 2; 1\}, \bar{b} = \{1; 4; 1\}, \bar{c} = \{1; 1; 3\}.$$

Розв'язання. Застосовуючи формулу (3.18), отримаємо:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 1 - 4 - 6 - 3 = 26.$$

Відповідь: Мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ дорівнює 26.

Приклад 2. Перевірити, чи точки $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Умова, чи знаходяться точки в одній площині, — це є умовою компланарності векторів.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB} = \{-1; -1; 6\}$, $\overline{AC} = \{-2; 0; 2\}$, $\overline{AD} = \{1; -1; 4\}$ і обчислимо їх мішаний добуток.

Отримаємо:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 12 - 0 - 8 - 2 = 0.$$

Отже, дані вектори компланарні, тобто лежать в одній площині.

Відповідь: Точки A, B, C, D лежать в одній площині.

3.5.4. Застосування мішаного добутку векторів

Розглянемо задачі, в яких при їх розв'язуванні застосовується мішаний добуток векторів.

Задача 1. Обчислення об'єму тетраедра (трикутної піраміди). Об'єм трикутної піраміди $ABCD$ становить одну шосту об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, тобто

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|. \quad (3.20)$$

Приклад 1. Знайти об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

Розв'язання. Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = \{3; 6; 3\}$, $\overline{AC} = \{1; 3; -2\}$, $\overline{AD} = \{2; 2; 2\}$ і далі обчислюємо їх мішаний добуток:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 + (-24) + 6 - 18 - 12 - (-12) = -18.$$

Використовуючи формулу (3.19), отримаємо $V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |-18| = 3$ (куб. од.).

Відповідь: Об'єм піраміди дорівнює 3 (куб. од.).

Приклад 2. Дано вершини тетраедра: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(9; -4; 8)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D на площину ABC .

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами тетраедра

$\overline{AB} = \{2; -2; -3\}$, $\overline{AC} = \{4; 0; 6\}$, $\overline{AD} = \{7; -7; 7\}$ і далі обчислюємо їх мішаний добуток:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 + (-84) + 84 - 0 - (-56) - (-84) = 140.$$

Використовуючи формулу (3.20), отримаємо $V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |140| = \frac{70}{3}$ (куб. од.).

З іншого боку,

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h, \quad (3.21)$$

де h — висота піраміди.

Використовуючи формулу (3.15), площа ΔABC буде дорівнювати половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, тобто

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}.$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28.$$

Площа трикутника $\triangle ABC$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14 \text{ (кв. од.)}.$$

$$\frac{70}{3} = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot h, \quad 14h = 70, \quad h = 5.$$

Відповідь: Довжина висоти, опущеної з вершини D , дорівнює 5 од.

3.5.5. Приклади і методи розв'язання задач з аналітичної геометрії

Задача 1. Дано дві точки $A(3, 8)$, $B(-5, 4)$.

1. Розрахувати відстань між точками A і B :

Розв'язання.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}.$$

2. Розрахувати спрямовуючий кут вектора $\overline{AB}$.

Розв'язання.

$$\cos \angle(\overline{AB}, Ox) = \frac{x_B - x_A}{|AB|} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\angle(\overline{AB}, Ox) = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3. Розрахувати координати точки $C(x_C; y_C)$, середньої на відрізку AB .

Розв'язання.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = -1, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = 6.$$

$C(-1, 6)$.

4. Скласти рівняння прямої Π_1 , яка проходить через точки A і B .

Розв'язання.

$$\Pi_1: \frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}.$$

Підставивши значення

$$\frac{x + 5}{8} = \frac{y - 4}{-4}, \text{ або } y = \frac{-x + 3}{2}.$$

5. Скласти рівняння прямої Π_2 , яка лежить у площині Oxy і проходить через точку A , перпендикулярну до вектора $\overline{AB}$.

Розв'язання.

$$\overline{AB} = (-8, -4).$$

Тоді шукану пряму буде записано у вигляді

$$\Pi_2: -8(x - x_A) - 4(y - y_A) = 0,$$

або

$$8x + 4y - 56 = 0.$$

6. Перевірити, чи проходить пряма Π_2 через точку $D(3, -2)$.

Розв'язання. Підставимо координати точки D у рівняння Π_2 :

$$8 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 56 = -40 \neq 0,$$

відповідно точка D не лежить на Π_2 .

7. Обчислити кут між вектором $\overline{AB}$ і радіусом-вектором $\overline{OD}$.

Розв'язання.

$$\cos \angle(\overline{AB}, \overline{OD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OD}}{|\overline{AB}| |\overline{OD}|} = \frac{-8 \cdot 3 + (-4) \cdot (-2)}{4\sqrt{5} \sqrt{3^2 + 2^2}} = -\frac{4}{\sqrt{65}}.$$

$$\angle(\overline{AB}, \overline{OD}) = \pi - \arccos \frac{4}{\sqrt{65}}.$$

8. Знайти векторний добуток $(\overline{AB} \times \overline{OD})$.

Розв'язання. Обидва вектори лежать у площині Oxy , тому їхній векторний добуток перпендикулярний до цієї площини. Тобто перші дві координати рівні 0. Третя є значенням визначника з координат векторів:

$$(\overline{AB} \times \overline{OD}) = \left(0, 0, \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 28).$$

9. Проілюструвати і пояснити за допомогою рис. 21 розв'язок задачі 1.

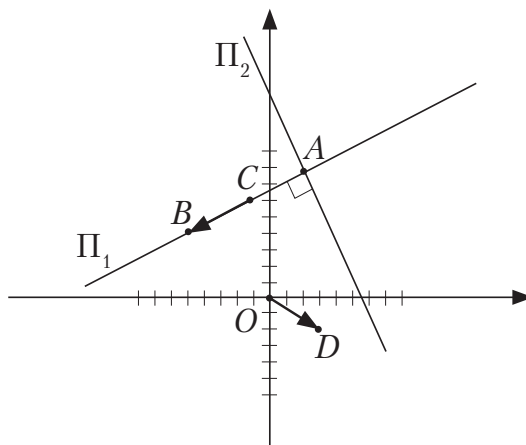


Рис. 21

Задача 2. Дано чотири точки, які утворюють чотирикутну піраміду $A(2, 2, 2)$, $B(-4, 3, 3)$, $C(4, 0, 4)$, $D(5, 5, 1)$.

1. Розрахувати відстань між точками A і B .

Розв'язання.

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{36 + 1 + 1} = \sqrt{38}.$$

2. Розрахувати кут між ребром AB та ребром BC .

Розв'язання.

$$\overline{BA} = (6, -1, -1); \quad \overline{BC} = (8, -3, 1).$$

$$\cos \angle(\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{6 \cdot 8 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{38} \sqrt{64 + 9 + 1}} = \frac{25}{\sqrt{703}}.$$

Звідки

$$\angle(\overline{BA}, \overline{BC}) = \arccos \frac{25}{\sqrt{703}}.$$

3. Розрахувати відстань від точки A до відрізка BC .

Розв'язання. Відстань можна розрахувати як висоту трикутника

$$d(A, B, C) = |AB| \sin \angle(\overline{BA}, \overline{BC}) = \sqrt{38} \sqrt{1 - \frac{625}{703}} = 2\sqrt{\frac{39}{19}}.$$

4. Написати рівняння площини, яка проходить через три точки O , A , B .

Розв'язання. Площину, яка проходить через точки O , A , B , можна знайти за формулою:

$$\begin{vmatrix} x - x_O & y - y_O & z - z_O \\ x_A - x_O & y_A - y_O & z_A - z_O \\ x_B - x_O & y_B - y_O & z_B - z_O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -14y + 14z = 0.$$

Спростивши, отримаємо: $(OAB) : y - z = 0$.

5. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки O , A .

Розв'язання. Пряму знаходимо за формулою:

$$\frac{x - x_O}{x_A - x_O} = \frac{y - y_O}{y_A - y_O} = \frac{z - z_O}{z_A - z_O}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}.$$

Спростивши, отримаємо:

$$OA: x = y = z.$$

6. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки A , B .

Розв'язання. Пряму знаходимо за формулою:

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{z - z_B}{z_A - z_B}.$$

Отримаємо:

$$AB: \frac{x+4}{6} = -y+3 = -z+3.$$

7. Розрахувати об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання. Об'єм піраміди можна обчислити як одну шосту від змішаного добутку векторів, на яких вона побудована.

$$\overline{AB} = (-6, 1, 1), \quad \overline{AC} = (2, -2, 2), \quad \overline{AD} = (3, 3, -1).$$

$$V_{ABCD} = (\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}) / 6 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-12+6+6+6+36+2}{6} = \frac{22}{3}.$$

8. Написати рівняння площини, яка проходить через точку A (рис. 22) і яка відтинає рівні відрізки на осях координат.

Розв'язання. Така площина має вектор нормалі $(1, 1, 1)$. Звідси

$$1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$

або, спростивши, $x + y + z - 6 = 0$.

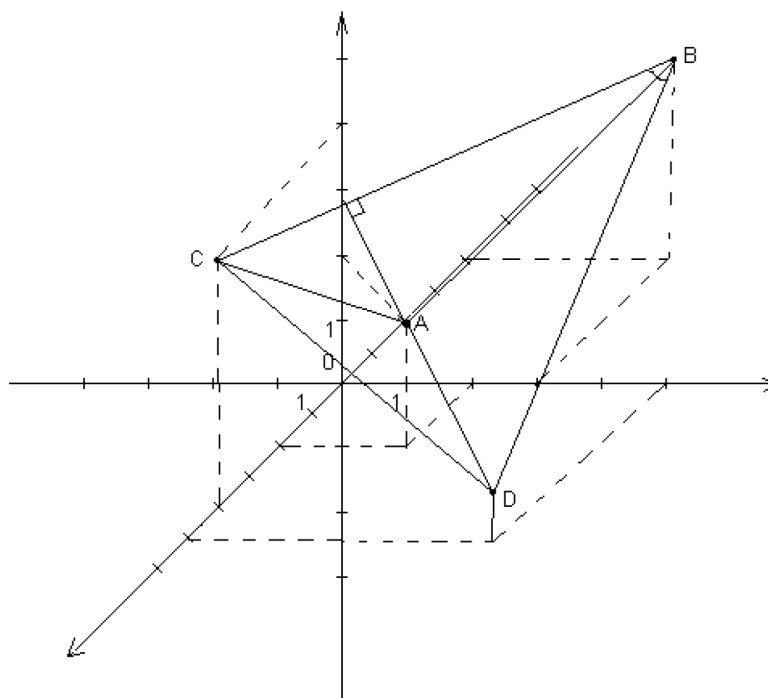


Рис. 22

Задача 3.

$$\Pi_1: x^2 + 4y^2 = 4.$$

$$A(1, -2, 5).$$

Скласти канонічне рівняння кривої лінії, яка є лінією перетину циліндричної поверхні Π_1 та нахиленої площини Π_2 , яка проходить через ось Ox і точку A .

Розв'язання. Перетином площини та еліптичного циліндра є еліпс.

Зауважимо, що одна з осей цього еліпса співпадає з тією віссю основного еліпса циліндра, яка лежить на осі Ox .

Для знаходження другої осі еліпса спроектуємо все на площину Oyz .

Друга вісь буде лежати на прямій, яка проходить через початок координат і проєкцію точки A , тобто на прямій $5y + 2z = 0$. При цьому такою віссю є відрізок, розташований посередині проєкції циліндра (рис. 23), тобто між -1 і 1 за віссю Oy . Отже, маємо, що друга вісь рівна $2\sqrt{1 + (5/2)^2} = \sqrt{29}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{29} = 1$.

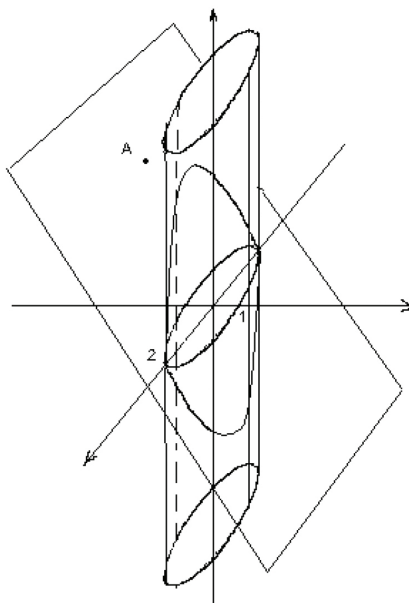


Рис. 23

Задача 4. Крива другого порядку задана рівнянням:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Визначити тип цієї кривої, записати її канонічне рівняння і побудувати в старій системі координат.

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
1	1	-2	3	-1	0	1
2	3	-1	3	2	2	-4
3	5	12	-1	2	-2	-1
4	0	-3	0	0	1	3
5	-5	-2	1	5/2	-1/2	0
6	2	5/2	-3	-3/2	5/2	-2
7	1	-1	1	-2	-3	3
8	3	1	3	3	-1	-5
9	4	-2	1	6	-3	9

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
10	1	0	0	3	-4	1
11	1	1	1	-5/2	-7/2	6
12	7	2	2	-20	-16	5
13	1	-1	1	1/2	-1	3
14	1	-1	1	-5/2	-7/2	6
15	2	-3/2	-1	3/2	1	0
16	1	4	4	-3	-1	1
17	1	1	1	1	1	-4
18	8	0	-3	1	-5/2	1
19	1	-1	2	-2	-3	29
20	9	-3	1	1	0	-7
21	1	-1	0	1	1	1
22	1	1/2	1	-1	2	-12
23	9	-6	4	-8	1	0
24	1	-1	1	-2	-3	3
25	6	-2	9	-2	-16	-6
26	1	-1	-2	-2	-3	3
27	1	-1	1	1	-3	0
28	1	1	1	1	1	-4
29	9	-3	1	-3	1	0
30	1	0	1	-2	-3	0
31	0	0	2	4	6	-3
32	1	-2	4	1	-1	-1
33	5	6	0	-11	-6	-19
34	3	5	7	2	1	1
35	1	-1	2	-2	-3	3
36	3	-3	5	-2	-3	10
37	9	12	16	20	15	0
38	1	-1	-2	-2	-3	-13/3
39	3	1	-1	4	5	14
40	0	-1/2	1	5/2	7/2	10
41	3	-2	4	-1	-2	2
42	1	3	9	2	6	-5
43	3	-1	3	2	2	-4
44	5	2	8	-16	-28	80

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
45	1	-1/2	-1	-1/2	-1/2	0
46	9	-2	6	3	-4	2
47	1	3	1	3	1	-1
48	5	-3/2	1	-3/2	1	-5
49	2	-2	5	-8	0	3
50	1	-1	2	-2	-3	3
51	1	-2	3	-1	0	1
52	3	-1	3	2	2	-4
53	5	12	-1	2	-2	-1
54	0	-3	0	0	1	3
55	-5	-2	1	5/2	-1/2	0
56	2	5/2	-3	-3/2	5/2	-2
57	1	-1	1	-2	-3	3
58	3	1	3	3	-1	-5
59	4	-2	1	6	-3	9
60	1	0	0	3	-4	1
61	1	1	1	-5/2	-7/2	6
62	7	2	2	-20	-16	5
63	1	-1	1	1/2	-1	3
64	1	-1	1	-5/2	-7/2	6
65	2	-3/2	-1	3/2	1	0
66	1	4	4	-3	-1	1
67	1	1	1	1	1	-4
68	8	0	-3	1	-5/2	1
69	1	-1	2	-2	-3	29
70	9	-3	1	1	0	-7
71	1	-1	0	1	1	1
72	1	1/2	1	-1	2	-12
73	9	-6	4	-8	1	0
74	1	-1	1	-2	-3	3
75	6	-2	9	-2	-16	-6
76	1	-1	-2	-2	-3	3
77	1	-1	1	1	-3	0
78	1	1	1	1	1	-4
79	9	-3	1	-3	1	0

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
80	1	0	1	-2	-3	0
81	0	0	2	4	6	-3
82	1	-2	4	1	-1	-1
83	5	6	0	-11	-6	-19
84	3	5	7	2	1	1
85	1	-1	2	-2	-3	3
86	3	-3	5	-2	-3	10
87	9	12	16	20	15	0
88	1	-1	-2	-2	-3	-13/3
89	3	1	-1	4	5	14
90	0	-1/2	1	5/2	7/2	10
91	3	-2	4	-1	-2	2
92	1	3	9	2	6	-5
93	3	-1	3	2	2	-4
94	5	2	8	-16	-28	80
95	1	-1/2	-1	-1/2	-1/2	0
96	9	-2	6	3	-4	2
97	1	3	1	3	1	-1
98	5	-3/2	1	-3/2	1	-5
99	2	-2	5	-8	0	3
100	1	-1	2	-2	-3	3
101	0	1	3	1	-3	5
102	21	1/2	-10	0	0	0
103	1	-2	4	5	-10	25
104	1	2	4	-3	-3	0
105	4	-2	1	2	-1	1
106	1	1	1	-4	0	4
107	1	-1	-3	-2	-3	3
108	32	30	7	-8	-1	1
109	2	-3	5	-1	1	-10
110	0	5	-2	3	2	21
111	1	5/2	-14	0	0	0
112	1	1/2	1	-1	-2	-12
113	1	-2	3	1	-1	0
114	2	-2	1	-1	3	-3

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
115	0	$-1/2$	1	$-5/2$	$7/2$	10
116	3	1	2	$3/2$	-2	0
117	1	$-3/2$	1	0	1	1
118	3	$7/2$	5	2	$5/2$	1
119	9	-6	2	-4	0	0
120	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0
121	5	12	-1	2	0	1
122	2	2	-3	-1	1	-2
123	3	1	3	3	-1	-5
124	1	0	0	$-1/2$	-1	-3
125	3	-1	3	2	2	-4
126	1	0	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	0
127	3	$7/2$	5	2	$5/2$	1
128	2	$5/2$	-3	$-3/2$	$-25/4$	-2
129	1	-1	-3	-2	-3	3
130	1	1	1	$-5/2$	$-7/2$	6
131	2	$5/2$	3	$3/2$	8	0
132	1	3	9	0	9	0
133	2	$-1/2$	-1	$-15/2$	$-3/2$	18
134	1	$5/4$	1	$-5/2$	$-7/2$	6
135	0	$1/2$	-1	-1	$3/2$	-1
136	3	$-7/2$	2	-2	3	-5
137	1	2	-1	-2	$-1/2$	4
138	2	$5/2$	-3	$3/2$	8	-5
139	1	$1/2$	1	1	$3/2$	-3
140	6	$-1/2$	0	-1	2	0
141	2	-2	5	-4	0	6
142	1	$5/3$	1	$-5/2$	$-7/2$	6
143	2	2	5	-4	0	6
144	1	-1	2	-2	-3	3
145	6	$-1/2$	-1	$5/2$	$1/2$	2
146	2	2	3	$-3/2$	$-3/2$	0
147	1	$1/2$	1	1	$3/2$	-3
148	3	1	2	$3/2$	-2	0
149	1	-1	1	-2	-3	3

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
150	3	$-7/2$	2	3	-2	-5
151	0	1	3	1	-3	5
152	21	$1/2$	-10	0	0	0
153	1	-2	4	5	-10	25
154	1	2	4	-3	-3	0
155	4	-2	1	2	-1	1
156	1	1	1	-4	0	4
157	1	-1	-3	-2	-3	3
158	32	30	7	-8	-1	1
159	2	-3	5	-1	1	-10
160	0	5	-2	3	2	21
161	1	$5/2$	-14	0	0	0
162	1	$1/2$	1	-1	-2	-12
163	1	-2	3	1	-1	0
164	2	-2	1	-1	3	-3
165	0	$-1/2$	1	$-5/2$	$7/2$	10
166	3	1	2	$3/2$	-2	0
167	1	$-3/2$	1	0	1	1
168	3	$7/2$	5	2	$5/2$	1
169	9	-6	2	-4	0	0
170	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0
171	5	12	-1	2	0	1
172	2	2	-3	-1	1	-2
173	3	1	3	3	-1	-5
174	1	0	0	$-1/2$	-1	-3
175	3	-1	3	2	2	-4
176	1	0	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	0
177	3	$7/2$	5	2	$5/2$	1
178	2	$5/2$	-3	$-3/2$	$-25/4$	-2
179	1	-1	-3	-2	-3	3
180	1	1	1	$-5/2$	$-7/2$	6
181	2	$5/2$	-3	$3/2$	8	0
182	1	3	9	0	9	0
183	2	$-1/2$	-1	$-15/2$	$-3/2$	18
184	1	$5/4$	1	$-5/2$	$-7/2$	6

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
185	0	1/2	-1	-1	3/2	-1
186	3	-7/2	2	-2	3	-5
187	1	2	-4	-2	-1/2	4
188	2	5/2	-3	3/2	8	-5
189	1	1/2	1	1	3/2	-3
190	6	-1/2	0	-1	2	0
191	2	-2	5	-4	0	6
192	1	5/3	1	-5/2	-7/2	6
193	2	2	5	-4	0	6
194	1	-1	2	-2	-3	3
195	6	-1/2	-1	5/2	1/2	2
196	2	2	3	-3/2	-3/2	0
197	1	1/2	1	1	3/2	-3
198	3	1	2	3/2	-2	0
199	1	-1	1	-2	3	3
200	3	-7/2	2	3	-2	-5

Задача 5. Зведіть квадратичну форму $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$ до канонічного виду, якщо:

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}	№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}
1	2	-1	3	3	-4	0	2	1	1	-3	3	-4	2
3	-3	-5	3	-4	5	-1	4	1	2	1	1	2	2
5	-1	-1	1	3	2	-3	6	3	3	6	-2	-2	1
7	-2	-2	2	1	3	-2	8	1	-5	0	1	1	1
9	-1	1	5	1	-1	-3	10	3	1	2	0	2	1
11	2	3	5	-3	-3	0	12	1	4	-1	2	-1	1
13	2	0	-6	1	1	2	14	2	5	2	0	4	2
15	1	-4	0	3	0	1	16	2	3	-2	2	-4	2
17	-1	5	-7	2	0	-3	18	-2	1	-5	3	3	-1
19	3	0	2	-2	3	1	20	1	-2	4	1	-4	1
21	1	2	-3	-2	-5	2	22	3	-2	0	2	-1	1
23	-2	-5	1	2	0	-2	24	-1	-5	0	2	1	-2
25	1	2	-6	-4	2	1	26	-2	-2	2	1	3	-2
27	1	0	-4	3	5	2	28	2	6	-1	0	-2	2
29	-1	1	5	1	-1	-3	30	3	1	2	0	2	1

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}	№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{23}	a_{33}
31	1	4	-1	2	-1	1	32	2	0	-6	1	1	2
33	-1	1	-6	3	3	-2	34	1	-2	-7	3	1	2
35	2	-1	3	2	-5	0	36	1	1	-2	2	-4	2
37	1	3	3	2	-6	3	38	-3	-6	3	-3	6	-1
39	1	3	1	1	2	2	40	-3	-1	1	1	3	0
41	-2	1	5	1	-2	-2	42	-1	-1	1	2	2	-3
43	1	3	-5	-3	3	1	44	1	0	-3	3	6	2
45	-1	2	5	1	-2	-3	46	3	1	2	0	2	1
47	-2	-2	4	2	-5	-1	48	2	4	-4	0	4	1
49	-3	6	1	-2	3	-1	50	1	5	-1	1	-1	1
51	-2	0	5	-1	-1	-2	52	1	-3	-6	2	1	2
53	-1	1	1	-2	1	-3	54	2	-2	3	3	5	2
55	-2	-4	2	-2	5	-2	56	-2	2	-4	2	3	-1
57	1	-3	4	1	-4	1	58	1	3	-1	-2	-6	2
59	2	-2	-1	0	-3	0	60	2	-2	1	1	3	1
61	2	-3	1	-1	4	1	62	1	7	-1	-3	-3	1
63	-2	6	-1	2	-2	-1	64	1	-1	4	-3	-6	1
65	2	1	5	0	-1	1	66	1	-7	2	2	-7	2
67	1	-1	-6	-2	0	2	68	2	-1	2	2	2	1
69	2	-2	2	-1	4	1	70	1	5	-1	-3	-3	1
71	-1	-2	4	2	-4	-2	72	1	-1	4	-4	-5	1
73	1	1	-5	2	4	1	74	-3	3	2	3	4	-1
75	1	1	-3	3	-4	2	76	3	3	4	4	6	0
77	-1	-2	-3	-3	5	-3	78	-3	-3	-6	2	2	-1
79	1	3	-5	5	-6	3	80	-4	-2	2	3	5	0
81	4	2	4	0	3	1	82	-4	12	4	-4	5	-1
83	2	-10	1	5	0	2	84	-4	6	3	4	11	-1
85	1	2	-4	5	-8	3	86	1	4	5	4	-14	4
87	2	-7	5	3	-14	2	88	-2	2	9	2	-4	-2
89	-1	-1	2	5	6	-4	90	2	3	-3	-1	-8	2
91	4	2	3	0	4	1	92	3	3	-7	-4	11	2
93	4	-8	-3	4	-7	1	94	1	-3	-10	5	4	2
95	3	-2	4	3	4	1	96	2	2	13	0	-1	1
97	3	6	-13	-6	5	1	98	4	0	3	-4	7	1
99	3	-2	2	3	7	1	100	2	2	-7	3	10	2

3.6. Векторний аналіз

Означення 1. Вектором називається напрямлений відрізок $\overline{AB}$. Буква A означає початок вектора, а буква B — його кінець.

Вектор також може позначатися однією маленькою буквою зі стрілкою або рисою вгорі $\vec{a}$, $\bar{a}$.

Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається *нуль-вектором* і позначають $\vec{0}$: $\vec{0} = \overline{AA}$, або просто 0 .

Два вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

Довжиною (модулем) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор і позначають $|\overline{AB}|$, або просто AB . Аналогічно довжину вектора $\vec{a}$ позначають $|\vec{a}|$, або a . Якщо $|\vec{a}| = 1$, то вектор називають одиничним.

Означення 2. Два вектора називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і їхні довжини рівні.

Додавання векторів

Означення 3. (Правило трикутника.) Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розташовані так, що початок другого вектора співпадає з кінцем першого, то сумою цих векторів називається вектор $\vec{c}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець вектора — з кінцем вектора $\vec{b}$.

(Правило паралелограма.) Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розташовані так, що початки збігаються, то сумою цих двох векторів називається вектор $\vec{c}$, який зображують у вигляді діагоналі паралелограма, побудованого на заданих векторах, причому початок вектора $\vec{c}$ збігається з початком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Множення вектора на число

Означення 4. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, при $\lambda \geq 0$ однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$, при $\lambda < 0$ протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$ та $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Віднімання векторів

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $-\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Скалярний добуток векторів

Означення 5. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначають $\vec{a} \cdot \vec{b}$) називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Властивості скалярного добутку:

- 1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
- 2) $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = \lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$;
- 3) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$;
- 4) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Означення 6. Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ називається *лінійно незалежною*, якщо рівність

$$k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_n \bar{a}_n = 0 \quad (3.22)$$

і виконується тоді й тільки тоді, коли $k_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

В іншому випадку ця сукупність векторів є *лінійно залежною*.

Рівність $k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_n \bar{a}_n = 0$ виконується, якщо існує хоча б одне число $k_j \neq 0$. У цьому випадку маємо:

$$\bar{a}_j = \frac{k_1}{k_j} \bar{a}_1 + \dots + \frac{k_{j-1}}{k_j} \bar{a}_{j-1} + \frac{k_{j+1}}{k_j} \bar{a}_{j+1} + \dots + \frac{k_n}{k_j} \bar{a}_n,$$

тобто вектор $\bar{a}_j$ лінійно виражається через інші вектори системи.

Базисом системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ називають таку її підсистему, вектори якої лінійно незалежні, а будь-який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

V_1, V_2, V_3 — векторний простір вільних векторів прямої, площини і простору відповідно.

Будь-який базис множини векторів V_2 , що компланарні площині, містить два неколінеарних вектори, а будь-який базис множини векторів простору V_3 містить три некомпланарних вектори.

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — три некомпланарних вектори, які утворюють базис у просторі V_3 . Тоді для довільного вектора $\bar{a}$ цього простору існує єдина трійка чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, така, що

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називають координатами вектора $\bar{a}$ у базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ і записують: $\bar{a}(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$.

У випадку V_2 кожний вектор виражається через два вектори базису і має дві координати.

Базис називається *ортонормованим*, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. В просторі V_3 вони позначаються так: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, а на площині V_2 — $\bar{i}, \bar{j}$.

У координатному вигляді зручно записати співвідношення між векторами та операції над ними.

Нехай маємо два вектори $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданими координатами в ортонормованому базисі. Тоді для них справедливі такі твердження:

1. Два вектори $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ однакові тоді і тільки тоді, коли однакові їхні відповідні координати: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$.

2. Два вектори $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

$$3. \bar{a} \pm \bar{b} = \bar{c}(a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3).$$

$$4. \lambda \bar{a} = \bar{c}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3).$$

$$5. \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

$$6. |\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

$$7. \cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \text{ де } \varphi \text{ — кут між векторами.}$$

Приклад 1. Нехай $\bar{x} = (2, 5, -3, 0)$; $\bar{y} = (-4, 2, 3, -1)$. Тоді

$$\bar{x} + \bar{y} = (2 + (-4), 5 + 2, -3 + 3, 0 + (-1)) = (-2, 7, 0, -1),$$

$$-2 \cdot \bar{x} = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 5, -2 \cdot (-3), -2 \cdot 0) = (-4, -10, 6, 0).$$

$$\text{Отже, } \bar{x} + \bar{y} = (-2, 7, 0, -1), -2 \cdot \bar{x} = (-4, -10, 6, 0).$$

Означення 7. Скалярним добутком двох векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ називається число

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (3.23)$$

або

$$(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x}| |\bar{y}| \cos \alpha, \quad (3.24)$$

де α — кут між векторами $\bar{x}$ та $\bar{y}$; $|\bar{x}|$ та $|\bar{y}|$ — модулі векторів, що визначаються рівностями

$$|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (3.25)$$

Із означення скалярного добутку двох векторів можна вивести формулу, що визначає кут між векторами:

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| |\bar{y}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}}. \quad (3.26)$$

Приклад 2. Знайти кут між векторами $\bar{x} = (2, 5, -3, 0)$; $\bar{y} = (-4, 2, 3, -1)$.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = -8 + 10 + (-9) + 0 = -7.$$

$$|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 25 + 9 + 0} = \sqrt{38},$$

$$|\bar{y}| = \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 4 + 9 + 1} = \sqrt{30}.$$

$$\cos \alpha = \frac{-7}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{30}}.$$

Сукупність n векторів $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ розмірності n , координати яких є $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, n$, лінійно незалежна, якщо матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

складена з координат цих векторів не вироджена, та лінійно залежна, якщо матриця A вироджена.

Приклад 3. Нехай маємо сукупність векторів $\bar{a}_1 = (1, 3, 1)$, $\bar{a}_2 = (2, 1, 1)$, $\bar{a}_3 = (3, -1, 1)$. Перевірити на лінійну залежність цю сукупність векторів.

Обчислимо визначник матриці, складеної з координат векторів

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 9 - 3 + 1 - 6 = 0.$$

Отже, дана сукупність векторів є лінійно залежною.

Щоб встановити цю залежність, запишемо систему однорідних рівнянь, породжену рівністю $k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + \dots + k_3 \bar{a}_3 = 0$:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}.$$

Необхідно знайти хоча б один ненульовий розв'язок системи рівнянь, яка має безліч розв'язків $|A| = 0$.

Для знаходження розв'язку скористаємось методом Гаусса. Для цього запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Останній розширений матриці системи відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_2 + 2k_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Отримали систему двох рівнянь з трьома невідомими. У цьому випадку невідома k_3 є незалежною, може приймати довільні числові значення. Дві інші невідомі k_1, k_2 залежать від невідомої k_3 та визначаються через неї рівно-

стями $k_2 = -2k_3$, $k_1 = k_3$. Якщо взяти $k_3 = 1$, а $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, то отримаємо таку залежність між векторами:

$$\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3 = 0, \text{ або } \bar{a}_1 = 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3.$$

Приклад 4. Нехай маємо сукупність векторів $\bar{a}_1 = (3, 1, 1)$, $\bar{a}_2 = (1, 1, 1)$, $\bar{a}_3 = (1, -1, 1)$, $\bar{b} = (4, 2, 2)$. Показати, що три вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ утворюють базис тривимірного векторного простору. Розкласти вектор $\bar{b}$ за цим базисом.

Розв'язання.

Три вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ — тривимірні. Якщо вони лінійно незалежні, то утворюють базис тривимірного векторного простору. Обчислимо визначник матриці, елементами якої є координати даних векторів:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 + 1 - 1 + 3 - 1 = 4 \neq 0.$$

Отже, три вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ — лінійно незалежні і тому утворюють базис тривимірного векторного простору. За цими векторами можна однозначно розкласти будь-який інший вектор — $\bar{b} = k_1 \bar{a}_1 + k_2 \bar{a}_2 + k_3 \bar{a}_3$. Записавши по кожній координаті цю векторну рівність для коефіцієнтів розкладу, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 + k_3 = 4 \\ k_1 + k_2 - k_3 = 2 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 2 \end{cases}.$$

Знайдемо розв'язок цієї системи рівнянь, застосовуючи формули Крамера. Для цього обчислимо визначник матриці системи та три допоміжних визначника:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Отже, } k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad k_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0.$$

Розклад вектора $\bar{b}$ по базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ має такий вигляд:

$$\bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2.$$

Безпосередня перевірка підтверджує правильність такої рівності.

3.6.1. Довідковий матеріал та приклади вирішення завдань

1. Відстань r між точками $A = (x_1; y_1; z_1)$ та $B = (x_2; y_2; z_2)$ визначається за формулою:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Відповідно, довжина $|\overline{AB}|$ вектора $\overline{AB}$ обчислюється як відстань між точками A і B .

Довжина $|\overline{a}|$ вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ обчислюється за формулою:

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Крім того, вірною є формула:

$$|\lambda \overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|,$$

де λ — будь-яке число. Ненульові вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називаються колінеарними, якщо виконано рівність $\overline{b} = \lambda \overline{a}$.

2. Скалярний добуток $\overline{a} \cdot \overline{b}$ векторів

$$\overline{a} = (x_1; y_1; z_1) \text{ і } \overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$$

визначається наступною формулою:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Відповідно, довжина $|\overline{a}|$ вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ може бути обчислена як $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$.

3. Скалярний добуток $\overline{a} \cdot \overline{b}$ векторів $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$ може бути визначено так:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos \beta,$$

де β — кут між даними векторами. Ця формула дозволяє обчислювати кут між векторами.

4. Площина в тривимірному просторі може бути задана рівнянням $Ax + By + Cz = D$. Тут вектор $\overline{n} = (A, B, C)$ перпендикулярний площині і називається вектором нормалі. Рівняння площини, що проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$, з вектором нормалі $\overline{n} = (A, B, C)$ може бути записано наступним чином:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

5. Пряма у тривимірному просторі може бути задана параметрично та канонічно. Параметричний вид рівняння прямої:

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc.$$

Тут $(x_0; y_0; z_0)$ — точка, що лежить на прямій; $(a; b; c)$ — напрямний вектор прямої; t — числовий параметр.

Канонічний вигляд рівняння цієї ж прямої:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

6. Пряма може бути також задана як лінія перетину двох площин, тобто як розв'язання системи двох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$f = \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}.$$

Завдання 1. Написати канонічне рівняння прямої, що проходить через точки $A = (2; 2; 5)$ та $B = (0; 2; -4)$.

Розв'язання. Напрямним вектором прямої є вектор $\overline{AB} = (-2; 0; -9)$, тому канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 5}{-9}.$$

Завдання 2. Знайти точку перетину E двох прямих, перша з яких проходить через точки $A = (1; -2; 5)$ та $B = (2; 1; 4)$, а друга — через точки $C = (6; 3; -2)$ і $D = (4; 2; 1)$.

Розв'язання. Складемо параметричні рівняння цих прямих. При цьому напрямний вектор першої прямої — це вектор $\overline{AB} = B - A = (1; 3; -1)$, що спрямовує вектор другий прямої — вектор $\overline{CD} = D - C = (-2; -1; 3)$. Тоді рівняння прямих:

$$\begin{aligned} x &= 1 + u, & y &= -2 + 3u, & z &= 5 - u; \\ x &= 6 - 2v, & y &= 3 - v, & z &= -2 + 3v. \end{aligned}$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 + u = 6 - 2v \\ -2 + 3u = 3 - v \\ 5 - u = -2 + 3v \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, отримуємо $u = 1$, $v = 2$. Підставляючи отримані значення u і v до рівнянь будь-якої з прямих, знаходимо точку їх перетину:

$$E = (2; 1; 4).$$

Зауважимо, що якби отримана система рівнянь не мала рішення, це означало б, що дані прямі не перетинаються, тобто вони паралельні чи схрещуються. Щоб визначити розташування зазначених прямих, доцільно розглянути їх напрямні вектори. Якщо вони колінеарні, то прямі паралельні або збігаються, а якщо ці вектори не є колінеарними, то прямі схрещуються.

Завдання 3. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки: $A = (1; 1; 1)$, $B = (2; -1; 1)$ та $C = (2; 2; 0)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор нормалі $\vec{n} = (a, b, c)$. Цей вектор повинен бути перпендикулярним векторам $AB = (1; -2; 0)$ і $AC = (1; 1; -1)$. Отже, скалярний добуток вектора нормалі і кожен із цих двох векторів має дорівнювати нулю.

Отримуємо систему двох рівнянь

$$f = \begin{cases} a - 2b = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}.$$

Розв'язок системи має вигляд $a = 2b$, $c = 3b$. Вважаючи $b = 1$, отримуємо вектор нормалі $\vec{n} = (2; 1; 3)$. Рівняння площини має вигляд:

$$2(x - 1) + (y - 1) + 3(z - 1) = 0 \quad \text{або} \quad 2x + y + 3z = 6.$$

Зауважимо, що вектор нормалі визначено неоднозначно. Втім і рівняння площини з точністю до множення визначено на ненульове число.

Завдання 4. Скласти рівняння площини, перпендикулярної до прямої $x = 5 + t$, $y = -t$, $z = -1 - 2t$ і проходить через точку $A = (2; -1; 1)$.

Розв'язання. Вектор нормалі площини співпадатиме з напрямним вектором даної прямої $\vec{n} = (1; -1; -2)$. Отже, рівняння площини має такий вигляд:

$$(x - 2) - (y + 1) - 2(z + 1) = 0, \quad \text{або} \quad x - y - 2z = 1.$$

Завдання 5. Скласти рівняння прямої, яка є лінією перетину двох заданих площин: $2x + y + z = 0$ і $x + 2y + z = 1$.

Розв'язання. Об'єднаємо рівняння у систему. У ході рішення невідомий y виберемо як вільний параметр, а невідомі x і z виразимо через $y = t$. Вирішуючи отриману систему рівнянь методом виключень (методом Гаусса), отримаємо такий розв'язок: $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 2 - 3t$. Отримане рішення, очевидно, є рівнянням шуканої прямої, записане у параметричній формі.

Завдання 6. Дослідити систему векторів на лінійну залежність та незалежність: $\vec{a} = (1; -2; -4)$, $\vec{b} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (4; -2; 1)$.

Розв'язання. Система з трьох векторів у тривимірному просторі залежна тоді і тільки тоді, коли визначник матриці, складеної з цих векторів (взятих як рядки або стовпці матриці), дорівнює нулю.

Обчислюючи визначник зазначеної матриці, отримуємо, що він не дорівнює 0.

Отже, система векторів є лінійно незалежною.

Завдання 7. Знайти ранг системи векторів

$$\vec{a} = (2; -1; -3), \vec{b} = (1; 0; 1), \vec{c} = (-1; 1; 3), \vec{d} = (1; 1; 4).$$

Вказати якийсь базис у цій системі векторів. Вектори, що не входять до базису, розкласти по базису.

Розв'язання. Складемо матрицю з даних векторів, взятих як її рядки, і приведемо її методом Гаусса до трикутного (ступінчастого) вигляду. Попередньо для зручності розрахунків змінимо порядок рядків у матриці. З боку від кожного рядка будемо вказувати відповідний вектор нижче (ці записи називаються коментарем):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} b \\ a \\ c \\ d \end{matrix}.$$

Помножуючи перший рядок на потрібні коефіцієнти і додаючи його до інших рядків, отримуємо нулі в першому стовпці під першим елементом головної діагоналі. В результаті маємо матрицю:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ c+b \\ d-b \end{matrix}.$$

Аналогічним способом за допомогою другого рядка отримуємо нулі в другому стовпчику під другим елементом головної діагоналі. Нова матриця набуває наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ (c+b)+(a-2b)=a-b+c \\ (d-b)+(a-2b)=d+a-3b \end{matrix}.$$

У коментарі розшифровано проведені перетворення.

В останньому перетворенні досягаємо нуля в останньому рядку третього стовпця (під третім елементом головної діагоналі):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ a-b+c \\ (d+a-3b)+2(a-b+c)=d-a-b-2c \end{matrix}.$$

Матриця доведена до необхідного вигляду, що свідчить про закінчення обчислень. Перші три рядки перетвореної матриці мають трикутний вигляд, що свідчить про лінійну незалежність відповідних векторів-рядків. Ці вектори становлять лінійні комбінації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Це дає можливість зробити висновок, що ранг вихідної системи векторів дорівнює трьом, а вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ є її базисом. Залишилось виразити вектор $\vec{d}$ через вектори базису. Слід

зауважити, що останній рядок матриці нульовий. Отже, згідно з коментарем маємо:

$\vec{d} - \vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} = 0$, звідки $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Завдання вирішено повністю.

3.6.2. Запитання до теми “Аналітична геометрія”

1. Означення, геометричне зображення та позначення вектора. Модуль вектора.
2. Нульові, одиничні, рівні, колінеарні, компланарні, протилежні вектори.
3. Лінійні операції над векторами: сума та різниця двох векторів (правила трикутника та паралелограма), добуток вектора на число.
4. Означення проєкції вектора на вісь.
5. Прямокутна Декартова система координат на площині та у просторі.
6. Координати вектора.
7. Розклад вектора по ортам (базису) прямокутної системи координат.
8. Знаходження алгебраїчної суми векторів, заданих у координатній формі.
9. Правило множення, заданого своїми координатами, вектора на число.
10. Обчислення модуля вектора, який заданий своїми координатами.
11. Означення скалярного добутку двох векторів, його фізичний зміст.
12. Властивості скалярного добутку двох векторів.
13. Знаходження скалярного добутку двох векторів, заданих у координатній формі.
14. Умова ортогональності векторів.
15. Означення векторного добутку векторів.
16. Поняття правої трійки векторів.
17. Властивості векторного добутку векторів.
18. Умова колінеарності двох векторів.
19. Знаходження векторного добутку векторів, що задані у координатній формі.
20. Обчислення площі трикутника і паралелограма за допомогою векторного добутку.
21. Поняття мішаного добутку векторів. Його геометричний зміст.
22. Властивості мішаного добутку векторів.
23. Умова компланарності трьох векторів.

3.6.3. Задачі до теми векторна алгебра та початки аналітичної геометрії

Операції над векторами

1. Дано точки $\underline{M}_1 (4; -2; 6)$, $M_2 (1; 4; 0)$. Знайдіть довжину вектора $\overline{M_1 M_2}$.
2. Відомо, що $\overline{AB} = (4; -12; z)$, причому $|\overline{AB}| = 13$. Знайдіть z .
3. Вектор $\vec{a}$ складає з осями Ox та Oy кути 60° та 120° . Знайдіть його координати та зробіть малюнок, якщо $|\vec{a}| = 2$.
4. Знайдіть вектор $\vec{a}$, що утворює з трьома базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}$ та $\vec{k}$ рівні гострі кути, за умови, що $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

5. Дано три вершини паралелограма $ABCD$: $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$, $C(1; 2; -3)$.
Знайдіть четверту вершину D .
6. Дано вершини трикутника: $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$, $C(-4; 0; 3)$.
Знайдіть довжину медіани з вершини A .
7. Побудуйте паралелограм на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ та $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$. Визначте довжини його діагоналей.
8. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$, якщо вектори $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - n\vec{k}$ колінеарні.
9. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$, якщо вектори $\vec{a} = (x; -2; 8)$ та $\vec{b} = (1; y; -4)$ колінеарні.
10. Знайдіть усі точки B , для яких вектори $\vec{AB}$ та $\vec{c}(1; 2; 3)$ колінеарні та $|\vec{AB}| = 2|\vec{c}|$, якщо задана точка $A(3; 2; 1)$.
11. Визначте довжини сторін паралелограма, діагоналями якого є вектори $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{d} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.
12. Дано вектори $\vec{a} = (4; -2; 4)$ та $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Знайдіть:
а) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; б) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; в) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.
13. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$ за трьома заданими точками:
а) $A(1; 2; -3; 4)$, $B(3; 4; -2; 0)$, $C(2; 4; -3; 6)$;
б) $A(2; -2; -4; 1)$, $B(4; 2; -5; 3)$, $C(2; 0; -3; 3)$;
в) $A(3; -1; 5; 2)$, $B(7; 1; 3; 3)$, $C(5; -1; 7; 3)$.
14. Знайдіть вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ і задовольняє умові $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
15. Вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a} = (3; -4; -12)$, утворює з віссю Ox тупий кут. Знаючи, що $|\vec{b}| = 26$, знайдіть його координати.
6. Обчисліть:
а) $(\vec{m} + \vec{n})^2$, якщо $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні вектори з кутом 30° між ними;
б) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, якщо $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$ та кут між цими векторами становить 135° .
17. Дано довжини векторів $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайдіть $|\vec{a} - \vec{b}|$.
18. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$.
Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$ та $|\vec{a} - \vec{b}|$.
19. Знайдіть косинус кута між діагоналями паралелограма $ABCD$, якщо задані три його вершини $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$, $C(-3; 3; -3)$.
20. Паралелограм побудований на векторах $\vec{AB} = (2,5; 1; 2,5)$ та $\vec{AD} = (0,5; -1; 1,5)$. Знайдіть кут між його діагоналями.
21. Вектори $\vec{AC} = (1; -1; 6)$ та $\vec{BD} = (-1; -5; 2)$ є діагоналями паралелограма.
Знайдіть кут між його сторонами AB та AD .
22. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ та $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні вектори, що утворюють кут 120° . Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.
23. Знайдіть кут між бісектрисами кутів xOy та yOz .
24. Знайдіть довжину проєкції вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:
а) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$;

- б) $\bar{a} = (-2; 3; -1; 4)$, $\bar{b} = (1; 0; 2; 2)$.
25. Знайдіть косинус кута між вектором $\bar{a}(3; 4; 5)$ і вектором $\bar{b}$ — проєкцією вектора $\bar{a}$ на координатну площину xOy .
26. Дано два вектори $\bar{a} = (m; 3; 4)$ та $\bar{b} = (4; m; 7)$. За яких значень параметра m вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ будуть перпендикулярні?
27. При якому значенні параметра m вектори $\bar{a} = m\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ і $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - m\bar{k}$ перпендикулярні?
28. При якому значенні параметра m кут між векторами $\bar{a} = m\bar{i} + \bar{k}$ та $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{a}$ дорівнює 180° ?
29. Знайдіть $\cos(\bar{b}, \bar{c})$, якщо:
- а) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = -7$ і $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$;
 б) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 4$ і $\bar{c} = \bar{a} + 3\bar{b}$.
30. Знайдіть $\bar{a} \cdot \bar{c}$, якщо:
- а) $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 1$, $\cos(\bar{b}, \bar{c}) = 5/6$ і $\bar{c} = \bar{a} - 3\bar{b}$;
 б) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 2$, $\cos(\bar{b}, \bar{c}) = 3/10$ та $\bar{c} = \bar{a} - 2\bar{b}$.
31. Знайдіть величину параметра $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, якщо кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює φ :
- а) $\bar{a}(5 \cos \alpha; 2 \sin \alpha; 5 \sin \alpha; 2 \cos \alpha)$, $\bar{b}(0; 2; 5; 0)$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$;
 б) $\bar{a}(3 \sin \alpha; -5 \cos \alpha; 3 \cos \alpha; 5 \sin \alpha)$, $\bar{b}(3; 0; 0; 5)$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
32. Знайдіть величину параметра $\alpha \in [0; \pi]$, якщо кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює φ :
- а) $\bar{a}(3 \cos \alpha; -5 \sin \alpha; 3 \sin \alpha; 5 \cos \alpha)$, $\bar{b}(3; 0; 0; 5)$, $\varphi = \frac{\pi}{7}$;
 б) $\bar{a}(-3 \cos \alpha; 5 \sin \alpha; -3 \sin \alpha; 5 \cos \alpha)$, $\bar{b}(3; 0; 0; -5)$, $\varphi = \frac{\pi}{7}$.
33. Кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ дорівнює 30° . Відомі довжини векторів $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$. Визначте косинус кута між векторами $\bar{c} = \bar{a} + 3\bar{b}$ та $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$.
34. Знайдіть $\cos(\bar{a}, \bar{b})$, якщо:
- а) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ і $\bar{a} \cdot (2\bar{a} + \bar{b}) = 6$;
 б) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 2$ і $(\bar{a} - 4\bar{b}) \cdot \bar{b} = -10$;
 в) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 4$ і $\bar{a} \cdot (3\bar{a} - \bar{b}) = 10$;
 г) $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$ і $(5\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{b} = 47$.

Прямі та площини у просторі

- Нехай $M_1(-1; -3; -7)$ та $M_2(-4; -1; -5)$. Напишіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2; -4; -2)$ перпендикулярна до вектора $\overline{M_1M_2}$.
- Напишіть рівняння площини, паралельної осі Ox , що проходить через точки та $M_1(0; 1; 3)$ та $M_2(2; 4; 5)$.

3. Напишіть рівняння площини, паралельної осі Oz та яка проходить через точки $M_1(3; 1; 0)$ та $M_2(1; 3; 0)$.
4. Напишіть рівняння площини, що проходить через вісь Oz та точку $M(2; -4; 3)$.
5. Напишіть рівняння площини, що проходить через вісь Ox та точку $M(0; 5; 6)$.
6. Складіть рівняння площини, що відсікає рівні відрізки на осях координат і проходить через точку $M(5; 4; 3)$.
7. Складіть рівняння площини, що відсікає на осях Oy та Ox удвічі більші відрізки, ніж на осі Oz , та проходить через точку $M(2; -3; 3)$.
8. Напишіть рівняння площини, паралельної площині $5x - 3y + 2z - 10 = 0$ та яка проходить через точку $M(2; 3; -1)$.
9. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(14; 2; 2)$ паралельно площині $x - 2y - 3z = 0$.
10. Знайдіть кут між площинами:
 - а) $x + 2y - 2z - 8 = 0$ та $x + y - 17 = 0$;
 - б) $x - y + z\sqrt{2} - 6 = 0$ та $x + y - z\sqrt{2} + 12 = 0$.
11. Напишіть рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до площин:
 - а) $x - 2y + z - 13 = 0$, $x + 2y - 2z + 2 = 0$, $M(-1; -1; 2)$;
 - б) $3x - 2y + 2z - 6 = 0$, $5x - 4y + 3z + 3 = 0$, $M(3; -1; -5)$.
12. Напишіть рівняння прямої (у канонічному параметричному вигляді), що проходить через точки $M_1(-1; 2; 3)$ та $M_2(2; 6; -2)$.
13. Напишіть у канонічному та параметричному вигляді рівняння прямої, що є перетином площин:

$$x + y - z - 2 = 0 \text{ та } 2x - y + z - 7 = 0.$$
14. Прямі l_1 та l_2 є лініями перетину двох пар площин. Визначте, чи перетинаються ці прямі:
 - а) $l_1: \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad i \quad l_2: \begin{cases} x + 3y - z - 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases};$
 - б) $l_1: \begin{cases} 3x + 3y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad i \quad l_2: \begin{cases} x + y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y + 4z - 5 = 0 \end{cases}.$
15. Напишіть рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M(3; -5; 2)$ на вісь Ox .
16. Знайдіть кут між прямою:
 - а) $\frac{x+1}{0} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{1}$ і прямою $x = 2t - 1$, $y = 2t + 3$, $z = 2$;
 - б) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$ та площиною $x + y + z\sqrt{2} = 0$.
17. Знайдіть косинус кута між двома променями:

$$\text{a) } l_1: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \\ t \in [0; +\infty] \end{cases} \quad i \quad l_2: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \\ z = 1 - k \\ k \in [-\infty; 0] \end{cases};$$

$$\text{б) } l_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + 4t \\ t \in [0; +\infty] \end{cases} \quad i \quad l_2: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -2 + 2k \\ k \in [-\infty; 0] \end{cases}.$$

18. Знайдіть довжину відрізка:

$$\text{a) } \begin{cases} x = -2,5 + 2t \\ y = 3,1 + 2t \\ z = -1,1 + t \\ t \in [-1; 1] \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 5 \\ y = -2,3 + 5t \\ z = 5 + 12t \\ t \in [-2; -1] \end{cases}.$$

19. За якого значення параметра a пряма l і площина α перпендикулярні:

$$\text{a) } l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad \alpha: 2x + (a+2)y - 2z + 11 = 0;$$

$$\text{б) } l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z}{6}, \quad \alpha: x + (a+1)y + 3z + 5 = 0.$$

20. Знайдіть точку перетину прямої l та площини α :

$$\text{a) } l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{2}, \quad \alpha: x - 3y + z - 8 = 0;$$

$$\text{б) } l: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{0}, \quad \alpha: 3x + y - 2z = 0.$$

21. Знайдіть точку перетину прямої, що проходить через точки $(1; 1; 1)$ і $(1; 2; 3)$, і площину $x - y - 3z - 11 = 0$.

22. За якого значення параметра a площина $x + y + az - 4 = 0$ та пряма $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ перетинаються (паралельні)?

23. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 3; -4)$ і перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

24. Напишіть рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ та точку $M(3; 4; 5)$.

25. Знайдіть координати проєкції точки P на площину α :

$$\text{a) } P(-1; 2; 0), \quad \alpha: 4x - 5y - z - 7 = 0;$$

$$\text{б) } P(2; -1; 1), \quad \alpha: x - y + 2z - 2 = 0.$$

26. Знайдіть відстань від площини $5x + 2y - z - 1 = 0$ до точки $M(0; -5; 10)$.
27. Знайдіть проєкцію точки M на пряму l :
- а) $M(2; 3; 4)$, $l: x = y = z$;
- б) $M(0; 2; 1)$, $l: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$.
28. Напишіть рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M(1; 0; -1)$ на пряму $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.
29. Знайдіть точку перетину прямих:
- а) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ і $\frac{x+6}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$;
- б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$ і $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{1}$.
30. Напишіть рівняння площини, відносно якої точки P_1 та P_2 симетричні:
- а) $P_1(1; -2; -3)$ і $P_2(3; 4; 9)$;
- б) $P_1(-2; 1; -3)$ і $P_2(6; 5; 5)$.
31. Знайдіть точку, симетричну точці P щодо площини α :
- а) $P(0; -1; 3)$, $\alpha: 2x + y - 2z - 2 = 0$;
- б) $P(2; 1; -1)$, $\alpha: 2x - y + z - 8 = 0$.
32. Знайдіть час t , необхідний для переходу об'єкта, що рухається зі швидкістю $\vec{v}(2; 0; 1)$, з точки $A(0; 2; 1)$ до точки $B(4; 2; 3)$.
33. Об'єкт, рухаючись площиною послідовно зі швидкостями $\vec{v}_1(1; -2)$ і $\vec{v}_2(2; 3)$, потрапляє з точки $A(-1; 3)$ у точку $B(7; 1)$. Знайдіть відповідні моменти часу t_1 і t_2 , а також точку B_{12} зміни швидкості t_1 на t_2 .
34. Об'єкт, рухаючись послідовно зі швидкостями $\vec{v}_1(1; 0; -1)$, $\vec{v}_2(-1; 1; 3)$ та $\vec{v}_3(-1; -1; 1)$, потрапляє з точки $A(2; 3; -2)$ у точку $B(1; 2; 3)$. Знайдіть відповідні моменти часу t_1 , t_2 та t_3 , а також точки та зміни швидкостей $\vec{v}_1$ на $\vec{v}_2$ та $\vec{v}_2$ на $\vec{v}_3$.
35. Знайдіть канонічне рівняння прямої, отриманої відображенням прямої
- $$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$
- відносно координатної площини yOz .
36. Знайдіть параметричне рівняння прямої, отриманої відображенням прямої $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ відносно координатної осі Oz .
37. Знайдіть рівняння площини, одержаної відображенням площини α щодо:
- а) координатної осі Oz , $\alpha: 2(x-3) - 3(y-1) + 4(z+3) = 0$;
- б) координатної осі Oz , $\alpha: 3(x+1) - 2(y-3) - 4(z+2) = 0$.

38. На прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+1}{-5}$ взято дві точки A та B на відстані $\sqrt{104}$ одна від одної. На якій відстані один від одного лежать їх проєкції A' і B' на вісь Oz ?
39. Знайдіть відстань від сфери $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$ до:
- а) точки $A(3; 6; 1)$;
 б) сфери $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2 = 1$.
40. Знайдіть відстань від сфери $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 64$ до сфери $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2 = 1$.
41. Знайдіть точку A дотику сфери $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$ та сфери:
- а) $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2 = 9$;
 б) $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 36$.
42. Знайдіть відстань від сфери $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$ до площини $x - 2y + 2z - 6 = 0$.
43. При яких значеннях параметра D площина $x - 2y + 2z + D = 0$ торкається сфери $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$.
44. Знайдіть радіус r кола, по якому сфера $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$ перетинається з площиною $x - 2y + 2z - 3 = 0$.
45. Дано нескінченний конус з вершиною $A(1; 2; 3)$, віссю
- $$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad t \in [0; +\infty)$$
- та кутом при вершині 2α таким, що $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Знайдіть:
- а) рівняння поверхні (бічної) цього конуса;
 б) умову на координати точок його внутрішньої частини.

Лінійні векторні простори

- Розкладіть вектор $\bar{x}(4; 3; -2)$ за векторами $\bar{e}_1(1; 1; 2)$, $\bar{e}_2(-3; 0; -2)$, $\bar{e}_3(1; 2; -1)$.
- Знайдіть координати вектора $\bar{x}(2; 2; -1)$ у базисі $\bar{e}_1(1; 0; 2)$, $\bar{e}_2(-1; 2; 1)$, $\bar{e}_3(-1; 4; 0)$.
- Розкладіть вектор $\bar{x}(2; 2; 3; 3)$ за системою векторів $\bar{a}(1; 2; 3; 1)$, $\bar{b}(2; 1; 2; 3)$, $\bar{c}(3; 2; 4; 4)$.
- Розкладіть вектор $\bar{x}(4; 1; 3; 1)$ за системою векторів $\bar{a}(2; 0; 1; 1)$, $\bar{b}(1; 1; 2; -2)$, $\bar{c}(2; 1; 3; -3)$.
- У лінійному просторі многочленів ступеня, що не перевищує 2, і з нульовим вільним членом знайдіть який-небудь базис. Знайдіть у цьому базисі розкладання многочлена $T(x) = x^2 - 3x$. У відповіді вкажіть координати многочлена $T(x)$ у вибраному базисі.

6. У лінійному просторі многочленів ступеня, що не перевищує 2, і з коренем $x = 1$ знайдіть якийсь базис. Знайдіть у цьому базисі розкладання многочлена $T(x) = x^2 - 3x + 2$. У відповіді вкажіть координати многочлена $T(x)$ у вибраному базисі.
7. У лінійному просторі многочленів ступеня, що не перевищує 2, знайдіть розкладання $T(x)$ базисом $P(x), Q(x), R(x)$. У відповіді вкажіть координати многочлена $T(x)$ у даному базисі:
- а) $T(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $P(x) = 4x^2 + 3x + 4$, $Q(x) = 3x^2 + 2x + 3$,
 $R(x) = x^2 + x + 2$;
- б) $T(x) = 9x^2 + 10x + 4$, $P(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $Q(x) = x^2 + x + 1$,
 $R(x) = 3x^2 + 3x + 2$.
8. Знайдіть якийсь базис у вказаному лінійному просторі L . Знайдіть координати елемента $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ у цьому базисі. У відповіді вкажіть координати A у вибраному базисі:
- а) L — лінійний простір всіх матриць 2×2 ;
- б) L — лінійний простір симетричних матриць 2×2 ;
- в) L — лінійний простір матриць 2×2 виду $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
9. У лінійному просторі симетричних матриць 2×2 знайдіть координати елемента:
- а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ у базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;
- б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ у базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- в) $A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ у базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
10. Дослідіть систему векторів на лінійну залежність або незалежність:
- а) $\bar{a}_1 = (-7; 5; 19)$, $\bar{a}_2 = (-5; 7; -7)$, $\bar{a}_3 = (-8; 7; 14)$;
- б) $\bar{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\bar{a}_2 = (0; -1; 4)$, $\bar{a}_3 = (2; -3; 3)$;
- в) $\bar{a}_1 = (1; 8; -1)$, $\bar{a}_2 = (-2; 3; 3)$, $\bar{a}_3 = (4; -11; 9)$;
- г) $\bar{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\bar{a}_2 = (2; -1; 1)$, $\bar{a}_3 = (1; 3; 4)$;
- д) $\bar{a}_1 = (0; 1; 1; 0)$, $\bar{a}_2 = (1; 1; 3; 1)$, $\bar{a}_3 = (1; 3; 5; 1)$, $\bar{a}_4 = (0; 1; 1; -2)$;
- е) $\bar{a}_1 = (-1; 7; 1; -2)$, $\bar{a}_2 = (2; 3; 2; 1)$, $\bar{a}_3 = (4; 4; 4; -3)$, $\bar{a}_4 = (1; 6; -1; 1)$;
11. Знайдіть ранг системи векторів і вкажіть якийсь базис у цій системі векторів. Вектори, що не входять до базису, розкладіть по базису:
- а) $\bar{a}_1 = (1; 1; 2)$, $\bar{a}_2 = (3; 1; 2)$, $\bar{a}_3 = (1; 2; 1)$, $\bar{a}_4 = (2; 1; 2)$;
- б) $\bar{a}_1 = (1; 1; 1)$, $\bar{a}_2 = (-3; -5; 5)$, $\bar{a}_3 = (3; 4; -1)$, $\bar{a}_4 = (1; -1; 4)$;

20. $\vec{d}_1 = (3; 0; 4)$ і $\vec{d}_2 = (2; 2; 1)$, $\cos A = \frac{2}{3}$.

21. $\vec{d}_1 = (0; -3; 4)$ і $\vec{d}_2 = (1; 2; 2)$, $\cos A = \frac{2}{15}$.

22. 120° .

23. 60° .

24. а) $\frac{8}{\sqrt{18}}$; б) $\frac{4}{3}$.

25. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

26. 4.

27. -6.

28. -2.

29. а) $\frac{11}{5\sqrt{13}}$; б) $\frac{8}{\sqrt{69}}$.

30. а) 21; б) 19.

31. а) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

32. а) $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{7}$, $\alpha = \frac{\pi}{7}$; б) $\cos \alpha = -\cos \frac{\pi}{7}$, $\alpha = \frac{6\pi}{7}$.

33. $c^2 = 3 + 9 + 9 = 21$, $d^2 = 1$, $cd = 3 + 3 - 3 = 3$, $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{21}}$.

34. а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{6}$.

Прямі та площини у просторі

1. $3x - 2y - 2z - 18 = 0$.

2. $2y - 3z + 7 = 0$.

3. $x + y - 4 = 0$.

4. $2x + y = 0$.

5. $6y - 5z = 0$.

6. $x + y + z - 12 = 0$, $x - y - z + 2 = 0$, $x + y - z - 6 = 0$, $x - y + z - 4 = 0$.

7. $2x + y + z - 4 = 0$.

8. $5x - 3y + 2z + 1 = 0$.

9. $x - 2y - 3z - 4 = 0$.

10. $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

11. а) $2x + 3y + 4z - 3 = 0$; б) $2x + y - 2z - 15 = 0$.

12. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{4} = \frac{z+2}{-5}$.

13. $\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$; $x = 3$, $y = -1 + t$, $z = t$.

14. а) ні; б) так, в точці $(1; -2; 2)$.

$$15. \frac{x-3}{0} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-2}.$$

$$16. \text{ а) } \varphi = \frac{\pi}{3}; \text{ б) } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$17. \text{ а) } \frac{2}{\sqrt{154}}; \text{ б) } -\frac{5}{9\sqrt{2}}.$$

$$18. \text{ а) } 6; \text{ б) } 13.$$

$$19. \text{ а) } a = 4; \text{ б) } a = 3.$$

$$20. \text{ а) } (2; -1; 3); \text{ б) } (1; 1; 2).$$

$$21. (1; -1; -3).$$

22. При $a \neq -1$ перетинаються, при $a = -1$ паралельні.

$$23. y + z + 1 = 0.$$

$$24. x - 2y + z = 0.$$

$$25. \text{ а) } (1; -0,5; -0,5); \text{ б) } (1,5; -0,5; 0). \quad 26. \sqrt{30}.$$

$$27. \text{ а) } (3; 3; 3); \text{ б) } (2; 0; -1).$$

$$28. \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$29. \text{ а) } (-5; 6; 1); \text{ б) } (3; 1; 1).$$

$$30. \text{ а) } x + 3y + 6z - 23 = 0; \text{ б) } 2x + y + 2z - 9 = 0.$$

$$31. \text{ а) } (4; 1; -1); \text{ б) } (6; -1; 1).$$

$$32. t = 2.$$

$$33. t_1 = 4; t_2 = 2; B_{12} = (3; -5).$$

$$34. t_1 = 4; t_2 = 2; t_3 = 3; B_{12} = (6; 3; -6); B_{23} = (4; 5; 0).$$

$$35. \frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-2}.$$

$$36. x = -3 - 4t, y = 2 + 2t, z = 1 + 3t.$$

$$37. \text{ а) } 2x + 3y + 4z + 9 = 0; \text{ б) } 3x + 2y + 4z + 1 = 0.$$

$$38. 10.$$

$$39. \text{ а) } 2; \text{ б) } 1.$$

$$40. 1.$$

$$41. \text{ а) } A(2; 4; -1); \text{ б) } A(2; 0; -1).$$

$$42. 2.$$

$$43. -6, 24.$$

$$44. r = 3.$$

$$45. \text{ а) } 2(x-1) + (y-2) - 2(z-3) = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2};$$

$$\text{ б) } 2(x-1) + (y-2) - 2(z-3) > 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}.$$

Лінійні векторні простори

1. $\bar{x} = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.

2. $(1; -3; 2)$.

3. $\bar{x} = \bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$.

4. $\bar{x} = 2\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$.

5. Як базис можна взяти $e_1 = x^2$, $e_2 = x$. У цьому базисі $T(x) = (1; -3)$.

6. Як базис можна взяти $e_1 = (x - 1)^2$, $e_2 = x - 1$. У цьому базисі $T(x) = (1; -1)$.

7. а) $(2; -1; -2)$; б) $(-1; -3; 5)$.

8. а) як базис можна взяти $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

У цьому базисі $A(0; 2; 2; 3)$.

б) як базис можна взяти $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. У цьому базисі $A(0; 2; 3)$.

в) як базис можна взяти $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. У цьому базисі $A(2; 2; 3)$.

9. а) $(2; 2; -4)$; б) $(2; -1; -2)$; в) $(-1; -3; 5)$.

10. а) лінійно залежна; б) лінійно незалежна.

11. а) ранг 3, як базис можна взяти $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. У цьому базисі $\bar{a}_4 = (0,5; 0,5; 0)$;

б) ранг 3, як базис можна взяти a_1, a_2, a_3 . У цьому базисі $\bar{a}_4 = (7,75; -0,25; -2,5)$;

в) ранг 2, як базис можна взяти $\bar{a}_1, \bar{a}_2$. У цьому базисі $\bar{a}_3 = (-1; 2)$, $\bar{a}_4 = (-2; 3)$;

г) ранг 3, як базис можна взяти $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. У цьому базисі $\bar{a}_4 = (0; -1; -2)$;

д) ранг 3, як базис можна взяти $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5$. У цьому базисі $\bar{a}_2 = (1; -1; 0)$, $\bar{a}_4 = (-2; 2,5; 1)$;

е) ранг 3, як базис можна взяти $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. У цьому базисі $\bar{a}_4 = (-3; 5; -1)$, $\bar{a}_5 = (-2; 0; 3)$.

12. а) $a = -3$; б) $a = 2$.

13. а) $a \neq 5$; б) $a \neq 2$.

Розділ 4

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

4.1. Вступ до аналізу

Математичний аналіз становить частину математики, в якій функції і їх узагальнення вивчаються методами границь. Поняття границі тісно пов'язане з поняттям нескінченно малої величини, тому можна також сказати, що математичний аналіз вивчає функції та їх узагальнення методом нескінченно малих.

У сучасному формулюванні “математичний аналіз” є скороченою назвою старої назви цієї частини математики — “Аналіз нескінченно малих”. У класичному математичному аналізі об'єктами вивчення (аналізу) є насамперед функції. Розвиток математичного аналізу вивчається його методами більш складних утворень, ніж функція, функціоналів, операторів і т. ін.

У природі та техніці зустрічаються зміни, рухи, які є першою ознакою того, що ми називаємо явищем, процесом. Закони явищ природи зазвичай описуються функціями. Звідси об'єктивна важливість математичного аналізу як засобу вивчення функцій.

Математичний аналіз у широкому розумінні цього терміна охоплює дуже велику частину математики: диференційне та інтегральне числення, теорії функцій дійсної змінної та комплексної змінної, наближення функцій, теорії диференціальних і інтегральних рівнянь, диференціальна геометрія, варіаційне числення, функціональний аналіз і деякі інші математичні науки.

Усе ж термін “математичний аналіз” часто застосовується для найменування лише основ математичного аналізу, які об'єднують у собі теорію дійсного числа, теорію границь, теорію рядів, диференційне та інтегральне числення і їх безпосередні застосування, такі, як теорія максимумів та мінімумів, теорія неявних функцій, ряди Фур'є, інтеграли Фур'є.

4.2. Елементи теорії множин

Поняття множини. Поняття множини є первісним поняттям, тобто таким, якому не дається означення. Можна говорити про множину $\mathbf{N}$ усіх натуральних чисел, множину $\mathbf{Z}$ усіх цілих чисел, множину $\mathbf{Q}$ усіх раціональних чисел і т. д. Творець теорії множин Георг Кантор (1845–1919) розумів множину як зібрання певних та різних об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, які сприймаються як ціле.

Множина вважається визначеною, якщо про будь-який об'єкт, що розглядається, можна сказати, що він належить або не належить цій множині. Якщо

деякий елемент X належить множині A , то пишуть $x \in A$. Якщо елемент X не належить множині A , то записують так: $x \notin A$.

Нехай X — деяка фіксована множина (іноді її називають основною) і P — певна властивість, яку мають деякі елементи $x \in X$. Множина всіх елементів x , що належать множині X і мають властивість P , позначається таким чином:

$$\{x \in X \mid P(x)\} \quad \text{або} \quad \{x \in X: P(x)\}.$$

Наприклад, якщо в значенні основної множини взяти множину Z , то множина $\{x \in Z \mid x > 0\}$ є множиною натуральних чисел.

Якщо множина має скінченне число елементів, то її можна задати переліком її елементів, тобто записати $A = \{a, b, c, \dots, k\}$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається знаком $\emptyset$.

4.2.1. Дії над множинами

Множина A називається підмножиною множини B , якщо кожен елемент множини A є елементом множини B , тобто якщо $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$. Якщо множина A є підмножиною множини B , то пишуть або $A \subset B$ або $B \supset A$.

Для будь-якої множини A приймається, що $\emptyset \subset A$.

Множини A та B називаються рівними, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Рівність множин позначається так: $A = B$.

Об'єднанням (сумою) множин A та B називається множина C , яка складається з елементів, кожен з яких належить множині A або множині B .

Об'єднання множин позначається: $C = A \cup B$.

Перерізом (добутком) множин A і B називається множина C , яка складається з елементів, кожен з яких належить як множині A , так і множині B . Записується: $C = A \cap B$.

Різницею множин A і B називається множина C , яка складається з усіх тих елементів множини A , які не належать множині B . Різниця множин позначається так: $C = A \setminus B$.

Нехай X — основна множина і $A \subset X$. Доповненням до множини A називається множина $\bar{A} = X \setminus A$.

Правила двоїстості.

Для будь-яких множин A і B мають місце співвідношення:

$$1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Доведемо перше зі співвідношень:

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ і } x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ і } x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Отже, $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, тобто $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Аналогічно доводиться друге співвідношення.

4.2.2. Частково впорядковані множини

Нехай M — довільна множина і φ — деяке бінарне відношення в ній. Це відношення називається частковою впорядкованістю, якщо воно задовольняє умови:

- 1) рефлексивності: $a\varphi a$;
- 2) транзитивності: якщо $a\varphi b$ і $b\varphi c$, то $a\varphi c$;
- 3) антисиметричності: якщо $a\varphi b$ і $b\varphi a$, то $a = b$.

Часткова впорядкованість може позначатися символом $\leq$. Множина, в якій задано деяку часткову впорядкованість, називається частково впорядкованою. Запис $a \leq b$ означає, що елемент a не перевищує b або, що він підпорядкований b , передує b , а b — не менше від a йде за a .

У випадку, коли $a \leq b$ та $a \neq b$, користуються символом $<$, тобто пишуть $a < b$ і говорять, що a менше від b або що a строго підпорядковане b .

Частково впорядкована множина, для будь-яких двох точок a, b , для якої існує точка c , що йде за ними ($a \leq c, b \leq c$), називається напрямленою.

Приклади.

1. Множина всіх натуральних чисел частково впорядкована, якщо $a \leq b$ означає “ b ділиться на a без остачі”.

2. Множина всіх підмножин деякої фіксованої множини частково впорядкована за включенням, якщо $M_1 \leq M_2$ означає, що $M_1 \subset M_2$.

3. Упорядкованою парою (a, b) є множина $\{a, \{a, b\}\}$.

Нехай a, b — елементи частково впорядкованої множини. Може виявитися, що жодне зі співвідношень $a \leq b$ і $b \leq a$ не має місця. У цьому випадку елементи a, b називаються непорівнянними. Тобто відношення порядку може бути визначеним лише для деяких пар елементів, тому і йдеться про часткову впорядкованість. Якщо ж в частково впорядкованій множині M непорівнянних елементів немає, то множина M називається впорядкованою (лінійно впорядкованою, цілком упорядкованою).

Декартовим добутком множин $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ називається множина впорядкованих n -ок:

$$\{(m_1, m_2, \dots, m_n) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \dots, m_n \in M_n\}.$$

Застосовується позначення $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}.$

4.2.3. Поняття відображення або функції

Нехай X і Y дві множини. Відображенням f множини X у множину Y називається правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$.

Замість слова “відображення” можна вживати “функція”, “оператор”, “відповідність”.

Записи $y = f(x)$, $X \xrightarrow{f} Y$, $f : X \rightarrow Y$ означають, що f є відображенням множини X у множину Y .

Для позначення функції вживаються й інші символи, наприклад $y = g(x)$, $y = F(x)$.

Елемент y , який відображення f ставить у відповідність елементу x , називається образом елемента x при відображенні f або значенням відображення f у точці x і позначається символом $f(x)$. Множина X називається областю визначення відображення f і позначається $D(f)$.

Множина $R(x) = \{y \mid \exists x \in D(f) : f(x) = y\}$ називається множиною значень відображення f .

Нехай $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Образом множини A при відображенні f називається множина $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Прообразом множини B при відображенні f називається множина $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Графіком функції $f : X \rightarrow Y$ називається множина

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X, y = f(x)\}.$$

Якщо $f : X \rightarrow Y$ і $g : Y \rightarrow Z$, то функція $h : X \rightarrow Z$, яка визначається формулами $h = g(f(x))$, $x \in X$, називається складеною функцією, або суперпозицією функцій f і g .

Приклад. $y(x) = \sin x$, $g(y) = y^2$, $h(x) = g(y(x)) = \sin^2 x$.

Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається відображенням множини X на множину Y або сур'єкцією, якщо $f(X) = Y$.

Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається взаємоднозначним відображенням множини X у множину Y або ін'єкцією, якщо

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Відображення $f : X \rightarrow Y$, яке є сур'єкцією та ін'єкцією, називається бієкцією. У цьому випадку мається на увазі, що f здійснює взаємоднозначну відповідність між множинами X і Y .

Якщо $f : X \rightarrow Y$ бієкція, то $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$. Функція $f^{-1} : Y \rightarrow X$ називається оберненою до бієкції f , якщо $f(x) = y$ та $f^{-1}(y) = x$.

Відображення $f : N \rightarrow X$ називається послідовністю елементів із X . Послідовність позначається так: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, де $x_n = f(n)$ — n -й член послідовності.

4.2.4. Потужність множин

Скінченною множиною називають множину, яка складається із скінченного числа елементів. Для скінченної множини A число її елементів позначається $|A|$. Скінченні множини можна порівнювати за кількістю їх елементів. Виникає питання, як можна порівнювати нескінченні множини? Побудована Г. Кантором теорія дає відповідь на поставлене питання. Вихідним пунктом цієї теорії є поняття потужності множини.

Множини A і B називаються рівнопотужними (мають однакову потужність), якщо існує бієкція $f: A \rightarrow B$. Рівнопотужні множини позначають так: $A \sim B$.

Зчисленні множини

Множина A називається зчисленною, якщо $A \sim \mathbf{N}$. У цьому випадку говорять, що елементи множини A можна занумерувати.

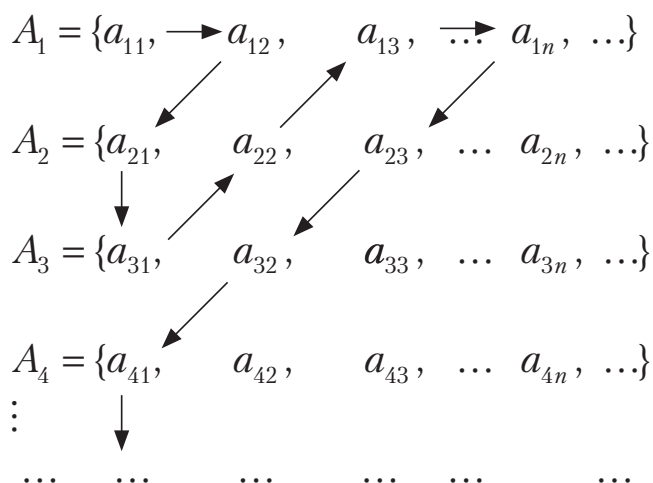
Мають місце наступні твердження:

1. Нескінченна підмножина зчисленої множини зчисленна.
2. Нескінченна множина містить зчисленну підмножину.
3. Об'єднання зчисленої множини зчисленних множин є зчисленною множиною.
4. Декартів добуток двох зчисленних множин зчислений.
5. Існують незчисленні множини.

Доведення першого і другого твердження досить прості. Їх пропонується виконати самостійно. Доведемо твердження 3.

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — зчисленні множини. Тоді для кожного $n \geq 1$ $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, \dots\}$.

Елементи об'єднання $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ цих множин можна подати у такому вигляді:



і занумерувати, наприклад, у порядку, вказаному стрілками. Цим саме буде встановлена бієкція $f: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \mathbf{N}$. Отже, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \mathbf{N}$.

Аналогічно доводиться твердження 4.

Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$. Тоді декартів добуток $A \times B$ складається із пар, які можна розташувати в такому порядку:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_n) & \dots & & \\
 (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & (a_2, b_n) & \dots & & \\
 & & \dots & & \dots & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

і занумерувати так, як зроблено в попередньому випадку.

Для доведення твердження 5 застосуємо діагональний метод (діагональну процедуру) Кантора.

Нехай A — множина всіх можливих нескінченних ланцюгів, що складаються з двох символів, наприклад 0 і 1 виразу $x = (0, 1, 1, \dots, 0, \dots)$.

Покажемо, що множина A незчисленна. Припустімо, що елементи множини A занумеровані, тобто множина зчисленна. Нехай

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots), \\ x_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, \dots), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

де кожне a_{ij} дорівнює 0 або 1. Утворимо елемент $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, поклавши $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \dots, b_n \neq a_{nn}$, і кожне відповідно дорівнює 0 або 1. Очевидно, що $y \in A$, але не збігається з жодним із занумерованих елементів $x_i \in A$. А це суперечить тому, що всі елементи множини A можна занумерувати.

4.3. Математична індукція

Математична індукція — це метод доведення математичних тверджень, який полягає у наступному: твердження $A(x)$, яке залежить від натурального параметра x , вважається доведеним, якщо доведено $A(1)$ і $\forall n \in N$ із припущення, що справедливе $A(n)$, доведено справедливості $A(n + 1)$.

Доведення твердження $A(1)$ називається першим кроком індукції (базисом індукції), а доведення $A(n + 1)$ за припущення справедливості $A(n)$ називається індуктивним переходом. При цьому x називається параметром індукції, а припущення $A(n)$ при доведенні $A(n + 1)$ називається індуктивним припущенням. Нехай A — зчисленна множина і для $n \in N$:

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$$

є множина впорядкованих n -членних ланцюгів. Тоді за твердженням 4 і методом (принципом) математичної індукції A^n є зчисленною множиною $\forall n \in N$.

4.4. Дійсні числа

Уведемо аксіоматичне означення дійсних чисел. Із шкільного курсу математики відомо, що множина дійсних чисел складається із множини раціональних та ірраціональних чисел. Раціональним називається число, яке можна подати у вигляді звичайного дробу $\frac{p}{q}$, де p, q — цілі числа, причому $q \neq 0$. Ірраціональним називається число, яке не є раціональним. Будь-яке раціональне число є або цілим, або скінченним чи нескінченним періодичним десятковим дробом. Ірраціональні числа — це нескінченні періодичні десят-

кові дробу. Виявлення ірраціональних чисел пов'язане із встановленням у школі Піфагора (570–496 р. до н. е.) несумірності діагоналі квадрата і його сторони, тобто із встановленням того факту, що довжина діагоналі квадрата не може бути виражена раціональним числом, якщо в значенні одиниці вимірювання взяти довжину сторони квадрата.

Дамо аксіоматичне означення множини дійсних чисел.

Множиною дійсних чисел називається множина елементів, для яких виконуються наступні аксіоми.

4.4.1. Аксіоми додавання і множення

Для будь-якої пари a та b дійсних чисел однозначно виражене число $a + b$, яке називається їх сумою.

Для будь-якої пари a і b дійсних чисел однозначно виражене число $a \cdot b$, яке називається їх добутком.

Для будь-яких дійсних чисел a, b, c виконуються наступні аксіоми:

$$1^0. a + b = b + a.$$

$$2^0. a + (b + c) = (a + b) + c.$$

$$3^0. a \cdot b = b \cdot a.$$

$$4^0. a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

$$5^0. (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

$$6^0. \text{Існує єдине число } 0, \text{ таке, що } a + 0 = a \text{ для будь-якого числа } a.$$

$$7^0. \text{Для будь-якого числа } a \text{ існує таке число } (-a), \text{ що } a + (-a) = 0 \text{ (число } (-a) \text{ називається протилежним числу } a).$$

$$8^0. \text{Існує єдине число } 1, \text{ таке, що } a \cdot 1 = a \text{ для будь-якого числа } a.$$

$$9^0. \text{Для будь-якого числа } a \neq 0 \text{ існує таке число } a^{-1}, \text{ що } a \cdot a^{-1} = 1; \text{ число } a^{-1} \text{ позначається також символом } \frac{1}{a} \text{ і називається оберненим до } a.$$

4.4.2. Аксіоми порівняння дійсних чисел

Для будь-яких дійсних чисел a, b установлене одне із співвідношень: $a = b$, $a > b$, $b > a$.

Відношення “=” має властивість: якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$.

Для будь-яких дійсних чисел a, b, c виконуються наступні аксіоми:

$$10^0. \text{Якщо } a > b \text{ і } b > c, \text{ то } a > c.$$

$$11^0. \text{Якщо } a > b, \text{ то } a + c > b + c.$$

$$12^0. \text{Якщо } a > b \text{ і } b > 0, \text{ то } a \cdot b > 0.$$

Зауваження. Замість більше пишуть $a \geq b$.

4.4.3. Аксіома неперервності дійсних чисел

13⁰. Нехай X і Y — дві множини, які складаються із дійсних чисел. Тоді, якщо $\forall x \in X, \forall y \in Y$ виконується нерівність $x \leq y$, то існує принаймні одне дійсне число C , для якого виконується нерівність $x \leq C \leq y$.

Зауваження. У множині лише раціональних чисел аксіома неперервності не виконується. Дійсно, нехай X складається із множини раціональних чисел, таких, що $x < \sqrt{2}$, а Y — із множини раціональних чисел $y > \sqrt{2}$. Тоді $\forall x \in X, \forall y \in Y$ виконується нерівність $x < y$. Проте не існує раціонального числа C , такого, щоб виконувалася б нерівність $x < C < y$. Таким числом могло бути лише число $\sqrt{2}$, а воно, як відомо, ірраціональне.

4.4.4. Деякі властивості дійсних чисел

Наведемо деякі властивості дійсних чисел.

1. Число $x = b + (-a)$ є розв'язком рівняння $a + x = b$.

Доведення. Підставимо в дане рівняння замість x його значення:

$$a + b + (-a) = b.$$

$$\text{Згідно з 1}^0: a + (-a) + b = b.$$

$$\text{Згідно з 2}^0: (a + (-a)) + b = b.$$

$$\text{Згідно з 7}^0: 0 + b = b.$$

$$\text{Згідно з 6}^0: b = b.$$

Зауваження. Число $b + (-a)$ називається різницею чисел a та b і позначається $b - a$. Зазначимо, що за умови $b > a$ різниця $b - a > 0$. Дійсно, якщо $b > a$, то за 11⁰ одержуємо $b + (-a) > a + (-a)$. Далі за 7⁰ маємо $b + (-a) > 0$, тобто $b - a > 0$.

2. Число $x = b \cdot a^{-1}$ є розв'язком рівняння $a \cdot x = b$, якщо $a \neq 0$.

Доведення. Підставимо в дане рівняння значення x : $a \cdot b \cdot a^{-1} = b$.

$$\text{Згідно з 3}^0: a \cdot a^{-1} b = b.$$

$$\text{Згідно з 4}^0: (a \cdot a^{-1}) b = b.$$

$$\text{Згідно з 9}^0: 1 \cdot b = b.$$

$$\text{Згідно з 8}^0: b = b.$$

Зауваження. Число $b \cdot a^{-1}$ називається часткою чисел a та b і позначається $\frac{b}{a}$ або $b : a$.

3. Якщо $a < b$, то $-a > -b$.

Дійсно, оскільки $a < b$, то $b - a > 0$. Отже, за 11⁰: $b - a + (-b) > 0 + (-b)$, звідки одержуємо $-a > -b$.

Зокрема, якщо $a > 0$, то $-a < 0$, а якщо $a < 0$, то $-a > 0$.

Дійсно, згідно з 6⁰: $(-0) + 0 = -0$, далі за 7⁰: $(-0) + 0 = 0$.

Отже, $0 = -0$.

4. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Дійсно, якщо $a > b$ і $c > d$, то за 11⁰: $a + c > b + c$, $c + b > d + b$. Далі згідно з 10⁰: $a + c > b + d$.

5. Якщо $a < b$ та $c > d$, то $a - c < b - d$.

Дійсно, якщо $c > d$, то згідно з 11⁰ одержуємо: $a - c < b - d$.

6. $a - a = 0$.

Така рівність випливає з того, що $a - a = a + (-a) = 0$.

7. $a \cdot 0 = 0$.

Дійсно, $a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = a \cdot b - a \cdot b = 0$.

8. $-(-a) = a$.

Дана рівність доводиться так: $-(-a) = (-(-a)) + (-a) = 0 + a = 0$.

9. $(-a) \cdot b = -a \cdot b$.

Доведення: $(-a) \cdot b = (-a) \cdot b + a \cdot b + (-a \cdot b) = ((-a) + a) \cdot b - a \cdot b = 0 \cdot b - a \cdot b = 0 - a \cdot b = -a \cdot b$.

Зокрема, $(-1) \cdot a = -a$.

10. Якщо $a < 0$ і $b > 0$, то $a \cdot b < 0$.

Дійсно, оскільки $a < 0$, то $-a > 0$, а тому $(-a) \cdot b > 0$ (згідно з 12⁰).

Отже, $(-a) \cdot b = -a \cdot b > 0$, а звідси $a \cdot b < 0$.

11. Якщо $a < 0$ та $b < 0$, то $a \cdot b > 0$.

Дійсно, оскільки $b < 0$, то $-b > 0$, а тому $(-b) \cdot a < 0$ (згідно з 10⁰).

Отже, $(-b) \cdot a = -a \cdot b < 0$, а звідси маємо $a \cdot b > 0$.

12. Якщо $a \neq 0$, то $a \cdot a = a^2 > 0$.

Це випливає з 11⁰.

За властивістю 12⁰ маємо: $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$, тобто $1 > 0$.

Надалі будемо використовувати й інші властивості дійсних чисел, не спираючись на їх формальному доведенні.

Властивість. Із означення множини дійсних чисел випливає, що ця множина впорядкована.

Множину дійсних чисел позначатимемо буквою $\mathbb{R}^1$.

Контрольні питання і завдання

Варіант 1

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cap A$.
2. Знайти результат виконання дій $(\overline{P} \cup Q) \setminus (P \cap \overline{Q})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a^2 + b^2 < 0\}$.

Варіант 2

1. Спростити вираз алгебри множин $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$.
2. Знайти результат виконання дій $(\bar{P} \setminus Q) \setminus (\bar{Q} \setminus P)$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — знаряддя праці } b\}$, $A = \{\text{скальпель, молоток, скрипка, голка, лінійка, віник, ножиці, рубанок}\}$, $B = \{\text{музикант, тесля, хірург, швачка, садівник, двірник}\}$.

Варіант 3

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A \cup B \cup \bar{A} \cap \bar{A} \cup \bar{B}}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P \cup Q) \cup \bar{R}}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — дільник } b\}$, де $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 4, 10, 16, 18, 42, 49\}$.

Варіант 4

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A \cup B \cup \bar{A} \cup (A \cap \bar{B})}}$.
2. Знайти результат виконання дій $(P \setminus \bar{Q}) \cup (\bar{Q} \setminus \bar{P})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, 0 \leq a - b < 5\}$, де $A = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Варіант 5

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cup A) \cup \bar{A}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P \div Q) \cup (R \div P)}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — автор } b\}$, де $A = \{\text{Шевченко, Гоголь, Л. Українка, Панас Мирний}\}$, $B = \{\text{“Ніч перед Різдвом”, “Вій”, “Сон”, “Хіба ревуть воли, як ясла повні”, “Гайдамаки”}\}$.

Варіант 6

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P \cap \bar{R}) \cup (Q \cap \bar{R})}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.

- Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, (a^2 - b) \text{ ділиться на } 2 \text{ без залишку}\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
- Скласти таблицю істинності булевої функції $f = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_3 \vee x_1)$.

Варіант 7

- Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A \cup B} \cup (\overline{B \cap A})} \cup \overline{A}$.
- Знайти результат виконання дій $(U \setminus R) \cap (\overline{U \setminus Q})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
- Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — столиця } b\}$, $A = \{\text{Київ, Лондон, Берлін, Париж, Рим}\}$, $B = \{\text{Італія, Україна, Німеччина, Франція, Англія, Іспанія}\}$.

Варіант 8

- Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cap B}} \cup (\overline{A \cup B})$.
- Знайти результат виконання дій $(\overline{U \cap R}) \cup (\overline{U \div Q})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
- Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, \sqrt{a} \geq \sqrt{b}\}$, $A = \{14, 6, 16, 10, 12, 4, 8\}$, $B = \{5, 7, 9, 17, 13, 11, 15\}$.

Варіант 9

- Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A \cup B) \cap (\overline{A \cup B}) \cup (A \cup \overline{B})}$.
- Знайти результат виконання дій $(Q \cup (\overline{R \div Q})) \setminus P$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
- Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, \cos a < \cos b\}$, $A = \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$, $B = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32} \right\}$.

Варіант 10

- Спростити вираз алгебри множин $\overline{(\overline{A \cap B}) \cup \overline{B} \cap \overline{A} \cup B}$.
- Знайти результат виконання дій $\overline{((P \setminus R) \setminus Q) \cap R}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
- Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, e^a < e^b\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $B = \{8, 10, 6, 2, 4, 12\}$.
- Скласти таблицю істинності булевої функції

$$f = \overline{(x_1 \rightarrow x_2)} \vee (\overline{x_2} \rightarrow x_3).$$

Варіант 11

1. Спростити вираз алгебри множин $(A \cup B) \cap (\overline{A \cup \overline{B}}) \cup A$.
2. Знайти результат виконання дій $(P \div Q) \div (R \div \overline{P})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — місяць пори року } b\}$, $A = \{\text{червень, травень, лютий, серпень, жовтень, січень, квітень, грудень}\}$, $B = \{\text{зима, весна, літо, осінь}\}$.

Варіант 12

1. Спростити вираз алгебри множин $A \cup \overline{B} \cap \overline{\overline{A \cup B} \cap \overline{B} \cup \overline{A}}$.
2. Знайти результат виконання дій $(P \div Q) \div \overline{R}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, 0 < 3a - 2b \leq 18\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

Варіант 13

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A \cap B} \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{A} \cap B}$.
2. Знайти результат виконання дій $((P \setminus Q) \setminus R) \cup (U \cap \overline{R})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, \ln a > \ln b\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$.

Варіант 14

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{B} \cup (\overline{A \cap B}) \cup \overline{\overline{B} \cup A} \cap A$.
2. Знайти результат виконання дій $(\overline{\overline{P} \cap \overline{Q}}) \cap (R \div Q)$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, \sin a \geq \cos b\}$, $A = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, $B = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \pi, 2\pi\right\}$.

Варіант 15

1. Спростити вираз алгебри множин $A \cup \overline{\overline{A} \cup B} \cap \overline{\overline{B} \cup A} \cap B$.
2. Знайти результат виконання дій $(P \div \overline{Q}) \cap (R \div P)$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, \sin a \leq \cos b\}$,

$$A = \left\{0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}, \quad B = \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{7}\right\}.$$

4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f = ((x_1 \setminus x_2) \downarrow \overline{x_2})$.

Варіант 16

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{B \cup A \cup B \cap A \cap B}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(\overline{\overline{P \cap Q}}\right) \cup (\overline{P \setminus R})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — свято пори року } b\}$, $A = \{\text{Івана Купала, Новий рік, День перемоги, Різдво, День Незалежності України}\}$, $B = \{\text{зима, весна, літо, осінь}\}$.

Варіант 17

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(\overline{A \cap B}) \cap B \cup \overline{A \cup B \cup A}}$.
2. Знайти результат виконання дій $(R \cup \overline{R}) \cap ((R \setminus P) \setminus \overline{Q})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a/2 > b/2\}$, $A = \{3, 6, 7, 9, 11, 20, 24\}$, $B = \{4, 6, 12, 8, 10, 18, 2\}$.

Варіант 18

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{B \cup \overline{A \cap B \cup (A \cap B \cup \overline{A})}}}$.
2. Знайти результат виконання дій $(P \setminus \overline{R}) \div (\overline{P \setminus Q})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — власна назва } b\}$, $A = \{\text{Ніл, Дніпро, Еверест, Азія, Африка, Донецьк, Арарат, Львів}\}$, $B = \{\text{озеро, річка, місто, гора, континент}\}$.
4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f = (\overline{x_1 \rightarrow x_2}) \setminus (x_1 \wedge x_3)$.

Варіант 19

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A \cap B \cup \overline{B \cap A \cup \overline{B \cap A}}}}$.
2. Знайти результат виконання дій $(P \cap \overline{R}) \cup (Q \setminus U)$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — колір квітки } b\}$, $A = \{\text{жовтий, білий, червоний, синій, зелений, рожевий}\}$, $B = \{\text{тройнда, конвалія, волошка, ромашка, тюльпан, мімоза}\}$.

Варіант 20

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A \cup \overline{B}) \cap \overline{A} \cup \overline{A \cup B \cup \overline{A}}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(U \setminus Q) \cap (U \div R) \cup P}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ — річка, яка протікає на просторі } b\}$, $A = \{\text{Дніпро, Дністер, Темза, Рона, Амазонка, Сена}\}$, $B = \{\text{Україна, Англія, Франція, Бразилія}\}$.

Варіант 21

1. Спростити вираз алгебри множин $A \cap \overline{(\overline{B \cup A}) \cap (\overline{\overline{A \cup B}})} \cup \overline{B}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{((R \div \overline{Q}) \div \overline{P}) \cup R}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, \sqrt[3]{a+b} \leq 2\}$, $A = \{2, 6, 4, 9, 3, 1\}$, $B = \{3, 5, 7, 12, 4, 2\}$.

Варіант 22

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A \cup B} \cap \overline{\overline{A \cup B} \cap \overline{B}}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P \cup (\overline{R \setminus Q})) \div U}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, b \text{ — дитина } a\}$, $A = \{\text{дід, баба, батько, мати}\}$, $B = \{\text{онук, онука, син, дочка}\}$.
4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow (x_1 \wedge \overline{x_3})$.

Варіант 23

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(B \cup A) \cap \overline{A} \cup (\overline{A \cap \overline{B}}) \cup B}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(\overline{P \setminus Q}) \setminus (\overline{Q \cap R})}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ є їжа для } b\}$, $A = \{\text{капуста, риба, баранина, сир, свинина, морква}\}$, $B = \{\text{вовк, кіт, миша, заєць, коза}\}$.

Варіант 24

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{B} \cap A \cup \overline{B} \cap \overline{A \cup \overline{B} \cap \overline{B}}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{((R \div Q) \setminus \overline{P}) \cap R}$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.

3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ має колір } b\}$, $A = \{\text{слива, яблуко, груша, лимон}\}$, $B = \{\text{жовтий, зелений, червоний, синій, білий}\}$.
4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f = (x_2 \wedge x_2) \oplus (x_3 \vee \overline{x_1})$.

Варіант 25

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A \cap B) \cup \overline{A} \cap B \cup A}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P \cup Q)} \setminus (R \cap \overline{P})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a^3 > b^3\}$, $A = \{2, 3, 6, 7, 9, 1, 20\}$, $B = \{4, 6, 12, 8, 10, 18, 2\}$.

Варіант 26

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup B)}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{((\overline{R} \setminus P) \cup (\overline{R} \setminus Q))} \setminus P$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $R = \{a, b, d, e, f\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ працює } b\}$, $A = \{\text{столяр, муляр, тесля, будівельник, токар}\}$, $B = \{\text{фарба, стамеска, молоток, токарний станок, долото}\}$.

Розділ 5

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

5.1. Означення числової послідовності

Означення. Числовою послідовністю називається відображення $f: N \rightarrow R^1$.

Отже, якщо кожному натуральному числу поставлено у відповідність дійсне число a_n , то множина дійсних чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (5.1)$$

називається числовою послідовністю.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називаються елементами (або членами) послідовності. Символ x_n називається загальним елементом послідовності, а n — його номером. Скорочено послідовність (5.1) позначається так: $\{a_n\}$.

Наприклад, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ є послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Слід зауважити, що між елементами даної послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ виконується співвідношення $a_n > a_{n+1}$ бо $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Така послідовність називається **строго спадною**. Різниця між сусідніми членами послідовності рівна $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$, тобто є змінною величиною яка зменшується при $n \rightarrow \infty$.

Більш цікавим прикладом числової послідовності є послідовність обернених квадратів: $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, елементами якої є $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$. Тут n -й елемент послідовності задано формулою $a_n = \frac{1}{n^2}$. Знайдемо різницю між a_n і a_{n+1} , це $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Ця величина спадає при $n \rightarrow \infty$.

Отже, $a_n > a_{n+1}$ для будь-якого $n \in N$, тому в цьому випадку кажуть, що така послідовність є **строго спадною**.

Добре відомо, що сума елементів послідовності $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ (обернених квадратів) дорівнює ірраціональному числу $-\frac{\pi^2}{6}$.

Послідовність вважається заданою, якщо вказано правило, за яким кожному натуральному числу n поставлено у відповідність дійсне число x_n .

Найчастіше числову послідовність задають формулою загального (n -го) члена послідовності: $y_n = f(n)$.

Наприклад, формула $x_n = \frac{n-1}{n}$ задає числову послідовність:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots,$$

тоді $y_{100} = 0,99$; $y_{1000} = 0,999$, їх різниця $y_{1000} - y_{100} = 0,999 - 0,99 = 0,001$.

Дослідимо відношення $\frac{n-1}{n} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1}$, оскільки величина $\frac{1}{n}$ строго спадає зі збільшення n , то дріб $\frac{1-\frac{1}{n}}{1}$ буде строго зростаючим, його значення буде наближатися (прямувати) до 1.

Числову послідовність можна задати рекурентною формулою, тобто формулою, в якій указується правило, за яким можна виразити наступний її член через попередні. Наприклад, арифметична прогресія з першим членом a_1 та різницею d визначається рекурентною формулою:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{або} \quad a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Наступною рекурентною формулою:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n = 3, 4, 5, \dots$$

задається послідовність Фібоначчі:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots,$$

що відома в математиці як “ряд Фібоначчі”, а її члени — як числа Фібоначчі. Ці числа мають ряд цікавих властивостей. Нині вони використовуються при обробці інформації на ЕОМ, при відшукуванні оптимальних методів програмування тощо. Якщо в цій же формулі $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ покласти початкові значення $f_1 = 2, f_2 = 1$, то отримаємо рекурентну схему для обчислення чисел Люка.

5.2. Арифметичні дії над числовими послідовностями

Нехай задано послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$. Добутком послідовності $\{x_n\}$ на число m називається послідовність $\{mx_n\}$, тобто

$$mx_1, mx_2, \dots, mx_n, \dots$$

Сумою послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{x_n + y_n\}$:

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots;$$

різницею — послідовність $\{x_n - y_n\}$:

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots;$$

добутком — послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$:

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n, \dots;$$

часткою — послідовність $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$:

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots, \text{ де } y_n \neq 0 \forall n \in N.$$

Приклад. Розглянемо суму послідовностей

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5, \dots, d = 2, x_n = x_{n-1} + d,$$

$$y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 7, \dots, d = 3, y_n = y_{n-1} + d.$$

Тоді їх сума $\{z_n\} = \{x_n + y_n\}$, тобто $z_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 12, \dots$. Зауважимо, що отримана послідовність знову є арифметичною прогресією з різницею $d = 5$.

5.3. Обмежені і необмежені числові послідовності

Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху, якщо існує таке число M , що для всіх її членів x_n виконується нерівність $x_n \leq M$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою знизу, якщо існує таке число m , що для всіх її членів x_n виконується нерівність $x_n \geq m$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо вона обмежена зверху й знизу.

Нехай послідовність $\{x_n\}$ обмежена, тобто існують такі числа M і m , що для будь-якого її члена x_n виконується нерівність $m \leq x_n \leq M$. Нехай $A = \max(|m|, |M|)$. Тоді умову обмеженості послідовності можна записати наступним чином: $|x_n| \leq A$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **необмеженою**, якщо для будь-якого числа $A > 0$ існує елемент x_n цієї послідовності, для якого виконується нерівність $|x_n| > A$.

Зауваження. Необмежена послідовність може бути обмеженою зверху або знизу.

Приклади.

Послідовність $1, 2, 4, \dots, 2n, \dots$ обмежена знизу ($1 \leq x_n = 2n$), але не обмежена зверху.

Послідовність $-1, -2, -3, \dots, -n$ обмежена зверху ($x_n = -n \leq 1$), але не обмежена знизу.

Послідовність $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ обмежена зверху і знизу ($\frac{1}{2} \leq x_n < 1$).

Послідовність $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots$ не обмежена.

5.4. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого числа $A > 0$ існує такий номер N , що для всіх елементів x_n з номером $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$.

Зауваження. У наведеному означенні номер N залежить від числа A , тобто $N = N(A)$.

Очевидно, що всяка нескінченно велика послідовність є необмеженою, проте не всяка необмежена послідовність є нескінченно великою. Наприклад, необмежена послідовність $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots, n, 0, n+1, \dots$ не є нескінченно великою, оскільки не існує такого номера N , щоб для всіх x_n , де $n > N$ виконувалася б, наприклад, нерівність $|x_n| > 1$ ($A = 1$).

Приклад 1. Показати, що послідовність $\{2n\}$ є нескінченно великою.

Нехай маємо довільне число $A > 0$. Із нерівності $|x_n| = |2n| > A$ або $n \geq \left\lceil \frac{A}{2} \right\rceil + 1$. Так, у випадку $A = 200$ ми отримуємо $n \geq 101$. Якщо $A = 1000$, то таке найменше N , для якого виконується $|x_n| > A$ рівне 501.

Означення. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається **нескінченно малою**, якщо для будь-якого (якого завгодно малого) числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що для всіх елементів α_n з номером $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Зауваження. У наведеному означенні номер N залежить від числа ε , тобто $N = N(\varepsilon)$.

Приклад 2. Показати, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно великою.

Нехай маємо довільне число $A > 0$. Із нерівності $|x_n| = |n^2| > A$ або $n > \sqrt{A}$.

Використаємо $N = \left\lceil \sqrt{A} \right\rceil + 1$ ($[a]$ — ціла частина числа a).

Тоді $|x_N| = \left(\left\lceil \sqrt{A} \right\rceil + 1 \right)^2$. Оскільки $\sqrt{A} < \left\lceil \sqrt{A} \right\rceil + 1 = \left\lceil \sqrt{A} \right\rceil$, то $A < \left(\left\lceil \sqrt{A} \right\rceil + 1 \right)^2$.

Отже, при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$. Наприклад, якщо $A = 256$, то $N = \left\lceil \sqrt{256} \right\rceil + 1 = 16 + 1 = 17$. Тому, починаючи із 17-го елемента послідовності $\{n^2\}$ буде виконуватися нерівність $n^2 > 256$.

Приклад 3. Показати, що послідовність $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ є нескінченно малою.

Нехай маємо довільне число $\varepsilon > 0$. Із нерівності $|\alpha_n| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ одержуємо $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, тепер добудемо корінь з обох частин нерівності $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Візьмемо

$N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1$. Тоді для всіх $n > N$ маємо $n \geq \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, тобто $\sqrt{\varepsilon} > \frac{1}{n}$ або $\varepsilon < \frac{1}{n^2} = |\alpha_n|$.

Теорема. Якщо $\{x_n\}$ нескінченно велика послідовність і всі її члени відмінні від нуля, то послідовність $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ є нескінченно малою, і, навпаки, якщо $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала послідовність й $\alpha_n \neq 0$, то послідовність $\left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\}$ є нескінченно великою.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ — нескінченно велика послідовність. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і покладемо $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Оскільки $\{x_n\}$ нескінченно велика послідовність, то для вказаного A існує номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$. Звідси маємо $\left| \frac{1}{x_n} \right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$. Отже, послідовність $\left| \frac{1}{x_n} \right|$ нескінченно мала.

Друга частина теореми доводиться аналогічно.

5.5. Збіжні послідовності

Границя числової послідовності

Означення. Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ із номером $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

а таку послідовність називають **збіжною**.

Послідовність, яка не є збіжною, називається **розбіжною**.

Приклад. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Доведення. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує таке натуральне число N , що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ із номером $n > N$ виконується нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Оскільки $x_n = \frac{n}{n+1}$, то

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Розв'язавши відносно нерівність $\frac{n}{n+1} < \varepsilon$, маємо що $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ виконується як тільки $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Якщо у значенні N узяти цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, тобто покласти $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$, то нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$ виконується для всіх $n > N = N(\varepsilon)$.

$$\text{Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то будь-який її елемент x_n можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де α_n — елемент нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n\}$.

Дійсно, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то послідовність $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$ є нескінченно малою, оскільки для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що для $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, тобто $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Має місце й обернене твердження. Якщо x_n можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала послідовність, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Нерівність (5.2) рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ або $-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon$, із якої випливає, що x_n знаходиться в ε -околі точки a . Отже, означення границі числової послідовності можна відобразити й в інший спосіб.

Означення. Число a називається **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що всі члени послідовності $\{x_n\}$ із номером $n > N$ знаходяться в ε -околі точки a .

Зрозуміло, що це означення рівносильне попередньому, яке не використовує термінологію ε -околів точки a .

Очевидно, що нескінченно велика послідовність не має границі. Іноді говорять, що вона має нескінченну границю і пишуть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Якщо при цьому, починаючи з деякого номера, всі члени послідовності додатні (від'ємні), то пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \right)$.

Усяка нескінченно мала послідовність α_n збіжна, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Це безпосередньо випливає з означення границі числової послідовності й означення нескінченно малої числової послідовності.

Приклад. З'ясуйте, чи множина $H = \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k : n \in N \right\}$ є обмеженою.

Знайдіть $\sup H$ та $\inf H$ і з'ясуйте, чи $\max H = \sup H$ і $\inf H = \min H$.

Розв'язання. Обчислимо значення $H = \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k : n \in N \right\}_{n=1}^{\infty}$ цієї послідовності. $H_1 = (-1)^1 = -1$, $H_2 = -1 + (-1)^2 = 0$, $H_3 = -1 + 1 + (-1)^3 = -1$.

Нехай $n = 4$, тоді $H_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$, ...

Тому $\sup H = \max H = 0$ і $\inf H = \min H = -1$. Але границі цієї послідовності не існує.

5.6. Властивості збіжних послідовностей

Теорема 1. Збіжна послідовність має єдину границю.

Доведення. Припустімо, що збіжна послідовність $\{x_n\}$ має дві різні границі a і b , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $a \neq b$. Тоді $x_n = a + \alpha_n$ та $x_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n — елементи нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$.

Отже, $a + \alpha_n = b + \beta_n$ або $a - b = \beta_n - \alpha_n$.

Оскільки $\beta_n - \alpha_n$, за властивістю нескінченно малих послідовностей, є елементами нескінченно малої послідовності, а $a - b$ постійне число, то $a - b = 0$. Таким чином, $a = b$.

Теорема 2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то вона обмежена.

Доведення. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і N — номер, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$. Тоді

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

для всіх $n > N$. Виберемо $A = \max\{\varepsilon + |a|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}$. За цієї умови $|x_n| < A$ для будь-якого $n \in N$.

Зазначимо, що не всяка обмежена послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ обмежена, але не збіжна.

Теорема 3. Якщо $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ — збіжні послідовності, то:

1. Послідовність $\{x_n \pm y_n\}$, яка є сумою (різницею) збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, збіжна і її границя дорівнює сумі (різниці) границь цих послідовностей, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2. Послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$, яка є добутком збіжних послідовностей $\{x_n\}$ й $\{y_n\}$, збіжна і її границя дорівнює добутку границь цих послідовностей, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

3. Послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, яка є часткою збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, за умови $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, збіжна і її границя дорівнює частці границь цих послідовностей, тобто
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n},$$
 ($\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$).

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні послідовності та $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тоді $x_n = a + \alpha_n$ і $y_n = b + \beta_n$, де α_n й β_n — елементи нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$. Покажемо, що має місце:

$$1) x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Оскільки $(\alpha_n + \beta_n)$ є елементами нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$, то звідси випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

$$2) x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

Оскільки $a \cdot b + b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n$ є елементами нескінченно малої послідовності $\{a \cdot b + b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n\}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

$$\text{Тобто } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} &= \frac{x_n b - y_n a}{y_n b} = \frac{(a + \alpha_n)b - (b + \beta_n)a}{y_n b} = \\ &= \frac{ab + \alpha_n b - ab - \beta_n a}{y_n b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{y_n b} = \frac{1}{y_n} \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b} = \frac{1}{y_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right). \end{aligned}$$

Послідовність $\left(\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n\right)$ є нескінченно малою. Покажемо, що послідовність $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ обмежена. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ і $b \neq 0$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ існує такий номер N , що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$.

Отже, $|y_n| = |b - b + y_n| = |b - (b - y_n)| \geq |b| - |b - y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$, тобто $|y_n| > \frac{|b|}{2}$, а тому $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq \frac{2}{|b|}$ для всіх $n > N$. Звідси випливає, що послідовність $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ обмежена.

Таким чином, послідовність $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n\right\}$ нескінченно мала, а тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$$

тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \text{ де } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

Зауваження. Перший пункт наведеної теореми допускає узагальнення на довільне скінченне число доданків. Другий пункт допускає узагальнення на довільне скінченне число множників. Із пункту два випливає, що постійний множник можна виносити за знак границі, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Приклад. Нехай $x_n = \{2\}_1^\infty$, $y_n = \left\{\frac{1}{n^3}\right\}_1^\infty$, тоді $2 \frac{1}{n^3} = \frac{2}{1} \frac{1}{n^3} = \frac{2}{n^3}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = C \cdot 0 = 0.$$

5.7. Невизначені вирази

Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Виникає питання, що можна сказати про границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$? Виявляється, що ця границя залежно від окремого закону поведінки змінних x_n та y_n може приймати різні значення або взагалі не існувати.

Приклади.

1. Якщо $x_n = \frac{1}{n^2}$ і $y_n = \frac{1}{n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Якщо $x_n = \frac{1}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n^2}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.

3. Якщо $x_n = \frac{c}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

4. Якщо $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n}$, то $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ не існує.

Отже, лише значення границь числових послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, не дозволяє у розглянутому вище випадку робити висновки про значення границі їх відношення. Щоб схарактеризувати цю особливість, зазначають, що за умови $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ вираз $\frac{x_n}{y_n}$ є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$.

Аналогічно невизначеними виразами є:

а) у випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \pm\infty$ вираз $\frac{x_n}{y_n}$ є невизначеністю типу $\frac{\infty}{\infty}$;

- б) у випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \pm\infty$ вираз $x_n \cdot y_n$ є невизначеністю типу $0 \cdot \infty$;
 в) у випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ вираз $x_n - y_n$ є невизначеністю типу $\infty - \infty$.

Для визначення границь невизначених виразів $\frac{x_n}{y_n}$ типу $\frac{\infty}{\infty}$ часто може застосовуватися теорема Штольца [21], яку наведено без доведення.

Теорема (Штольца). Якщо послідовності x_n, y_n такі, що:

1) починаючи з деякого номера n виконується вимога $y_{n+1} > y_n$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$;

3) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

Приклад. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5n+3}$.

Розв'язання.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(5 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{5}.$$

5.8. Неперервність функції

5.8.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

тобто границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці.

Функція неперервна в кожній точці інтервалу називається *неперервною* на цьому інтервалі.

Теорема 1. Якщо функції $f_1(x), f_2(x)$ неперервні в точці x_0 , то неперервні в цій точці їх сума $f_1(x) \pm f_2(x)$, добуток $f_1(x) \cdot f_2(x)$ і за умови

$$f_2(x) \neq 0 \text{ частка } \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Зауваження. Для алгебраїчної суми і добутку попередня теорема поширюється на будь-яке скінченне число функцій.

Теорема 2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0 .

Теорема 3. Якщо $f(x)$ — неперервна функція, що має однозначну обернену функцію, то обернена функція також неперервна.

Теорема 4. Всі основні елементарні функції неперервні там, де вони визначені.

Якщо функція $f(x)$ — неперервна в точці x_0 , то точка x_0 називається *точкою неперервності* функції $f(x)$.

Означення 2. Якщо границя функції $f(x)$ в точці x_0 не існує, або існує, але не дорівнює $f(x_0)$, функція $f(x)$ називається розривною в точці x_0 , а x_0 — *точка розриву* функції $f(x)$.

Точки розриву бувають двох родів: першого роду і другого роду.

Означення 3. Точка розриву функції називається точкою розриву першого роду, якщо функція в цій точці має скінченні границі зліва $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ і справа $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

Приклад. Точка x_0 є точкою розриву першого роду $x_0 = 0$.

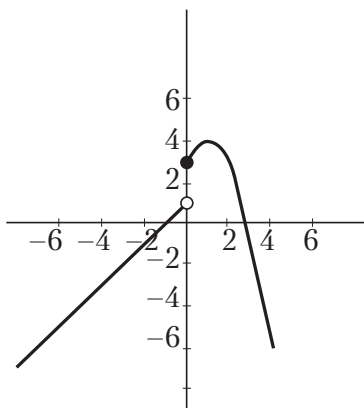


Рис. 23

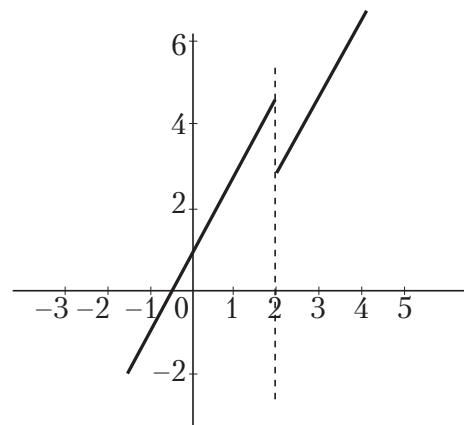


Рис. 24

Функція (рис. 23) задана кусково і має вигляд:

$$y = \begin{cases} x + 1, & -\infty < x < 0, \\ (x - 1)^2 + 4, & 0 \leq x < \infty. \end{cases}$$

На наступному рис. 24 точка x_1 є точкою розриву першого роду $x_1 = 2$.

Означення 4 Всі інші точки розриву називаються точками розриву другого роду.

Означення 5. Точка x_0 розриву першого роду, для якої

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x),$$

називається точкою усувного розриву.

Означення 6. Якщо односторонні границі рівні значенню функції в цій точці, то функція називається неперервною в цій точці.

Означення 7. Якщо ліва або права границі в точці x_0 дорівнюють нескінченності, то точка x_0 називається точкою нескінченного розриву.

Означення 8. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 зліва (справа), якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$).

5.8.2. Найпростіші властивості неперервних функцій

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною на сегменті $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b) і в точці a неперервна зліва, а в точці b — справа.

Теорема 1. Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має границю в точці x_0 , то в цій точці існують границі функцій

$$kf(x), f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

і мають місце рівності:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) &= k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); \\ 2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x); \\ 3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x); \\ 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Інакше кажучи, сталий множник можна виносити за знак границі. Границя суми (різниці, добутку) функцій дорівнює сумі (різниці, добутку) границь даних функцій. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню їх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю. Ці властивості використовують для обчислення границь функцій у заданих точках.

Теорема 2. Многочлен є функція, неперервна на всій числовій прямій.

Теорема 3. Будь-яка дробово-раціональна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

Наприклад, функція $f(x) = \frac{3-x}{4x+7}$ неперервна на всій числовій прямій, крім точки $x = -\frac{7}{4}$, в якій знаменник дробу обертається в нуль. Функція

$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$ неперервна всюди на R , бо знаменник ніде не обертається в нуль.

Функції, неперервні на відрізку, мають ряд важливих властивостей.

Теорема 4. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків, то всередині відрізка $[a, b]$ знайдеться хоча б одна точка, в якій ця функція обертається в нуль.

5.9. Основні властивості неперервних функцій

Перша теорема Больцано-Коші (теорема про перетворення функції в нуль). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях значення функції мають різні знаки, тобто виконується умова $f(a)f(b) < 0$. Тоді існує точка $C \in (a, b)$ така, що $f(C) = 0$.

Доведення. Нехай для визначеності $f(a) < 0, f(b) > 0$. Розділимо відрізок $[a; b]$ навпіл. Якщо $f\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$, то теорема доведена. Якщо $f\left(\frac{b-a}{2}\right) \neq 0$, то виберемо ту половину відрізка $[a, b]$, на кінцях якої функція $f(x)$ має значення різних знаків, позначаючи кінці цієї половини відрізка як a_1 і b_1 , отримаємо новий менший відрізок, який позначимо як $[a_1, b_1]$, де $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$. Розділимо відрізок $[a_1, b_1]$ навпіл. Якщо $f\left(\frac{b_1-a_1}{2}\right) = 0$, то теорема доведена, в іншому випадку виберемо ту половину відрізка $[a_1, b_1]$, на кінцях якої функція $f(x)$ має значення різних знаків, та позначимо її $[a_2, b_2], f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$. Якщо цей процес продовжувати необмежено, то або на якомусь k -му кроці значення функції в середині відрізка $[a_k, b_k]$ буде рівним нулю і тоді теорема доведена, або одержимо послідовність вкладених відрізків

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

таких, що $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і на кінцях кожного з відрізків $[a_n, b_n]$ функція $f(x)$ набуває значення різних знаків, $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$, тобто $f(a_n)f(b_n) < 0$.

За теоремою про вкладені відрізки [21] існує точка C , яка належить кожному з відрізків $[a_n, b_n]$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = C$. Ураховуючи неперервність

функції $f(x)$ (зокрема в точці C), маємо $f(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0$; $f(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$. Звідси одержуємо $f(C) = 0$.

Друга теорема Больцано-Коші (теорема про проміжне значення). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення $f(a) = A, f(b) = B$, де $A \neq B$. Тоді для будь-якого числа $C \in (A, B)$ існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = C$, де $A < C < B$.

Доведення. Нехай для визначеності $A < B$. Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = C - f(x)$. Ця функція неперервна на відрізку $[a, b]$ і

$$\varphi(a) = C - f(a) = C - A > 0, \varphi(b) = C - f(b) = C - B < 0.$$

За першою теоремою Больцано-Коші існує точка $c \in (a, b)$ така, що $\varphi(c) = 0$. Але $\varphi(c) = C - f(c) = 0$. Отже, $C - f(c) = 0$, тобто $f(c) = C$.

Перша теорема Веєрштраса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Припустімо, що вона на відрізку $[a, b]$ не обмежена. Поділимо відрізок $[a, b]$ пополам і виберемо ту його частину, де функція $f(x)$ не обмежена. Позначимо її $[a_1, b_1]$. Відрізок $[a_1, b_1]$ також поділимо пополам і виберемо ту його частину, де функція $f(x)$ не обмежена. Позначимо вибрану половину $[a_2, b_2]$. Продовжуючи цей процес нескінченно, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

таких, що $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. За теоремою про вкладені відрізки існує точка C , яка належить кожному із них і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = C$. За означенням

границі послідовності для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N_1 , що при $n > N_1$ виконується $|a_n - c| < \varepsilon$; з іншого боку, існує такий номер N_2 , що при $n > N_2$ виконується $|b_n - c| < \varepsilon$. Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконуються нерівності: $c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$, $c - \varepsilon < b_n < c + \varepsilon$, тобто всі відрізки $[a_n, b_n]$, де $n > N$ потрапляють в інтервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Таким чином, функція $f(x)$ не обмежена в деякому ε -околі точки c . Однак це неможливо, оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, а значить, неперервна і в точці $c \in (a, b)$, тобто в точці c такий, що виконується $f(c) = C$ існує скінченна границя функції $f(x)$, а тому в околі цієї точки вона обмежена згідно з означенням границі.

Друга теорема Веєрштраса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх точних меж, тобто існують такі точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, що

$$f(x_1) = \sup_{[a, b]} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{[a, b]} f(x).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. За першою теоремою Веєрштраса функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ обмежена. Отже, вона має точну верхню межу $\sup_{[a, b]} f(x) = M$ і точну нижню межу $\inf_{[a, b]} f(x) = m$.

Покажемо, що існує точка $x_1 \in [a, b]$ така, що $f(x_1) = M$. Припустимо супротивне, а саме, що в жодній точці відрізка $[a, b]$ функція $f(x)$ не приймає значення, рівного M , тобто для всіх точок $x \in [a, b]$, $f(x) < M$. Складемо допоміжну функцію $F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Ця функція на відрізку $[a, b]$ неперервна, а тому обмежена. Отже, існує число μ таке, що для всіх $x \in [a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \mu.$$

Із цієї нерівності маємо: $f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}$. Таким чином, $M - \frac{1}{\mu}$ — верхня межа функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Але це суперечить тому, що число M — точна верхня межа цієї функції на відрізку $[a, b]$. Звідси випливає, що зроблене припущення неправильне, тобто існує точка $x_1 \in [a, b]$ така, що $f(x_1) = M$.

Друга частина теореми доводиться аналогічно.

Зауваження. Точна верхня межа функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, називається її найбільшим (максимальним) значенням на цьому відрізку, а точна нижня межа — її найменшим (мінімальним) значенням. Різниця $w = M - m$, де $M = \max_{[a, b]} f(x)$, $m = \min_{[a, b]} f(x)$, називається коливанням функції на відрізку $[a, b]$.

Теорема Больцано-Веєрштраса

Теорема 1. Із будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}$ можна виділити збіжну підпослідовність.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ обмежена, тобто існує такий відрізок $[a, b]$, що для всіх x_n виконується нерівність $a \leq x_n \leq b$. Поділимо відрізок $[a, b]$ пополам. Тоді принаймні в одній половині буде міститися нескінченна множина елементів послідовності $\{x_n\}$. Позначимо цю половину $[a_1, b_1]$. Поділимо тепер відрізок $[a_1, b_1]$ на два рівних відрізки і знову виберемо той із них, у якому міститься нескінченна множина елементів послідовності $\{x_n\}$. Позначимо його $[a_2, b_2]$. Продовжуючи цей процес, дістанемо послідовність вкладених відрізків

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

у яких довжина n -го відрізка $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Отже, за теоремою про вкладені відрізки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = C$.

Побудова підпослідовності $\{x_{n_k}\}$ послідовності $\{x_n\}$ виконується наступним чином: у значенні x_{n_1} виберемо довільний елемент із $\{x_n\}$, який належить

відрізку $[a_1, b_1]$ у значенні x_{n_2} — довільний елемент із $\{x_n\}$, який належить відрізку $[a_2, b_2]$ і т. д. Оскільки для вибраних таким чином елементів виконується нерівність $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, то за попередньою теоремою $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = C$.

Теорема про границю функції

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ має границю в точці x_0 , то ця границя єдина.

5.10. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій:

а) $y = \sqrt{2 - x^2}$; б) $y = x^3 - 4x + 7$;
 в) $y = \ln \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; г) $y = \arcsin(x - 2) - \ln(4 - x)$.

2. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару $(2x + 50)$ грн, якщо продано товару менше, ніж 40 од., та доплачує йому 20 % комісійних, якщо товару продано 40 од. і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою, отриманою продавцем.

3. Витрати виробництва y випущеної продукції x виражаються функцією $y = 4 + 0,5x$. Скласти функцію собівартості, тобто обсяг витрат виробництва на одиницю продукції.

4. Щорічний приріст продукції становить 10 %. Через скільки років випуск продукції збільшиться у два рази?

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1)$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1 - x^2}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x - 8}$;
 є) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{3x + 2}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{4x + 1}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 5x - 1)$;
 и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$; і) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$; й) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \right)^{2x - x^3}$.

6. Дослідити функцію на неперервність $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{якщо } x < 1 \\ x^2 + 2, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}$.

Відповідь для завдання 1.а) $D(x) = \{x : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

Розв'язання для завдання

$$5.з) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(x - 6 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

$$5.ж) \text{ Розкрити невизначеність } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(3 + \frac{5}{x} \right)}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}.$$

5.11. Критерій Коші збіжності числової послідовності

Означення границі числової послідовності не дає змоги встановлювати збіжність чи розбіжність числової послідовності, якщо не задано значення самої границі. Воно лише дає можливість перевіряти, чи є число a границею даної послідовності, чи ні. Отже, виникає необхідність у наявності критерію збіжності числової послідовності, у якому б саме значення границі було відсутнє, тобто щоб цей критерій виявив “внутрішню” структуру збіжної послідовності. Такий критерій було встановлено чеським математиком Больцано і французьким математиком Коші. Нині він має назву критерію Коші.

Теорема. Щоб числова послідовність $\{x_n\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існував номер N такий, що нерівність

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad (5.3)$$

виконувалася б для всіх m, n , які одночасно задовольняють умову $m > N, n > N$.

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{x_n\}$ збіжна і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. За означенням границі існує такий номер N , що

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ і } |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.4)$$

для всіх $n > N$. Зрозуміло, що коли $m > N$, то для всіх таких m нерівність (5.4) виконується. Отже, нехай $m > N, n > N$. Тоді

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - a) + (a - x_n)| \leq |x_m - a| + |a - x_n| = \\ &= |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер N , такий, що $|x_m - x_n| < \varepsilon$ для всіх n, m , які одночасно задовольняють умову $m > N, n > N$. Доведемо, що при цьому послідовність $\{x_n\}$ збіжна. Нехай заданому $\varepsilon > 0$ відповідає номер N , для якого виконується нерівність (5.3) для всіх $m > N, n > N$.

Зафіксуємо одне зі значень $n > N$. Тоді за умовою (5.3) виконуються нерівності

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon, |x_{n+2} - x_n| < \varepsilon, \dots, |x_{n+e} - x_n| < \varepsilon, \dots$$

тобто всі члени послідовності, починаючи з x_{n+1} , знаходяться в ε -околі фіксованої точки x_n . Звідси випливає, що послідовність $\{x_n\}$ обмежена. Отже, згідно з теоремою Больцано-Вейєрштраса з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$.

Нехай $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = C$. Тоді C є також границею послідовності $\{x_n\}$. Справді, k можна вибрати настільки великим, щоб одночасно виконувались нерівності $|x_{n_k} - C| < \varepsilon$, $n_k > N$. Тоді, поклавши $m = n_k$, матимемо $|x_m - C| < \varepsilon$ і $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Звідси одержуємо

$$|x_n - C| = |(x_n - x_m) + (x_m - C)| \leq |x_n - x_m| + |x_m - C| < \varepsilon + \varepsilon < 2 \cdot \varepsilon$$

для всіх $n > N$. А це означає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = C$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *фундаментальною* або послідовністю Коші, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що для всіх m, n , які одночасно задовольняють умову $m > N, n > N$, виконується нерівність $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

5.12. Поняття рівномірної неперервності функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку X . Виберемо довільну точку $x_0 \in X$. Тоді за означенням неперервності функції у точці x_0 для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ виконуватиметься для всіх $\forall x$, що задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$.

Зрозуміло, що число δ залежить як від числа ε , так і від x_0 (рис. 25).

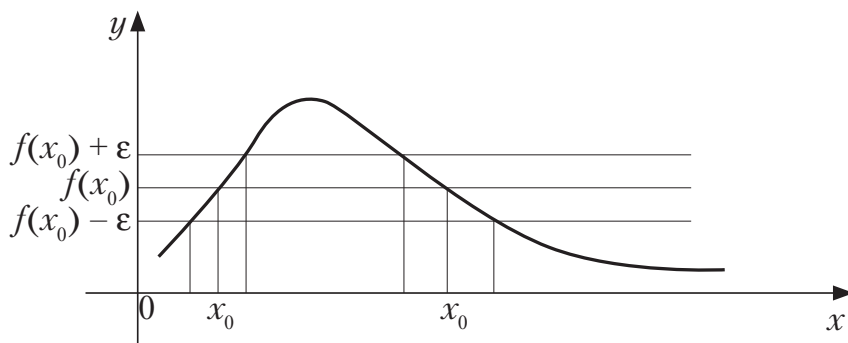


Рис. 25

Виникає питання, чи існують такі неперервні функції, визначені на певних проміжках, що для будь-якого числа знаходилося б $\delta > 0$, незалежне від x_0 , тобто, щоб δ було єдиним для довільного значення x_0 із проміжку визначення функції $f(x)$ (залежне лише від ε) і таким, що нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ виконувалася б за умови $|x - x_0| < \delta$.

Вирішення цього питання приводить до поняття рівномірної неперервності функції.

Означення. Функція $f(x)$ називається **рівномірно неперервною** на проміжку X , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільних точок $x, x_0 \in X$, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

5.13. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від ірраціональної функції не завжди обчислюється в скінченному вигляді. Проте деякі типи таких інтегралів за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Позначимо $R(u_1, u_2, \dots, u_n)$ раціональну функцію від змінних $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{3x+5}}$ є раціональною від $x, \sqrt{x-2}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{3x+5}$, тобто

$$f(x) = R(x, \sqrt{x-2}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{3x+5}).$$

Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right) dx,$

де $m_i, n_i > 1, i = 1, 2, \dots, p$ — натуральні числа, a, b, c, d — дійсні числа, причому $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (в іншому випадку $\frac{ax+b}{cx+d}$ — стала величина) обчислюється за допомогою введення нової змінної

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де k — спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}, i = 1, 2, \dots, p$.

Приклад 1. Обчислити $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}.$

Розв'язування.

Зробимо підстановку $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

Одержимо

$$t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad 1-x = \frac{2}{t^2+1}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t dt}{(t^2+1)^2}.$$

Далі маємо

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Приклад 2. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

Розв'язування.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x}, \quad x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = \int \frac{6t^3 dt}{t+1} = \\ &= 6 \left(\int (t^2 + t + 1) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановок Ейлера.

Якщо $a > 0$, то вводиться нова змінна t :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t,$$

де знаки можна брати у будь-якій послідовності.

Якщо у тричлені $ax^2 + bx + c$, $a < 0$, $c > 0$, то можна використати іншу підстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

У випадку коли $a < 0$ і тричлен має дійсні різні корені α й β , то використовується підстановка

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= (x - \alpha)t \\ \text{або} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} &= (x - \beta)t. \end{aligned}$$

Слід зауважити, що підстановки Ейлера часто приводять до досить складних раціональних функцій, а тому на практиці при обчисленні інтегралів цього типу користуються простішими методами.

Висновок. Отже, у цьому розділі ми ознайомилися з числовими послідовностями і поняттями їх збіжності, асимптотичними оцінками класів величин. Для збіжних послідовностей доведено всі їх властивості і вивчено арифметичні дії над числовими послідовностями. На прикладах показано ці дії до обчислення границь числових послідовностей.

Розділ 6

ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ

6.1. Частинні та повний прирости функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0 + \Delta x; y_0)$, $M(x_0; y_0 + \Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (рис. 26).

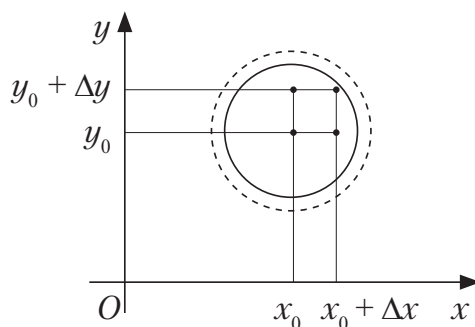


Рис. 26

Означення. Різницю $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ називають *повним приростом* функції $z = f(x; y)$ при переході від точки $(x_0; y_0)$ до точки $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і позначають Δz . Різницю $f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ називають *частинним приростом за x* , а різницю $f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ — *частинним приростом за y* функції $z = f(x; y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Таким чином,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$
$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0), \quad \Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш як двох змінних.

6.2. Диференційованість функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається *диференційованою* у точці $(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B — числа; α, β — нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$ називається повним диференціалом функції (точніше першим диференціалом) двох змінних $f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається dz :

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1. Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, тоді існують границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ та $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ і вони дорівнюють відповідно A і B .

Означення. Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в точці $(x_0; y_0)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right)$, то вона називається *частинною похідною за x (за y)* функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x , або $f_x(x_0; y_0)$. Таким чином, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z'_x$, $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = z'_y$. З означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x змінна y вважається **сталюю**, а при знаходженні z'_y змінна x вважається **сталюю**.

Тепер можна сформулювати теорему 1 інакше.

Теорема 2. (необхідна умова диференційованості функції $z = f(x; y)$ у точці). Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y .

Приклад 1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin(x^2 + \sqrt{y}) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \operatorname{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $y = \operatorname{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад 2. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Знайдемо z'_x , вважаючи $y = \text{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y , вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад 3. Для функції $f(x; y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-(x-a)^2/4y}$ знайти f'_x і f'_y :

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{-(x-a)}{2y} e^{-(x-a)^2/4y}, \quad f'_y = \left(-\frac{1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}} \right) e^{-(x-a)^2/4y}.$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, як впливає з означення повного диференціала і теореми 1, повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x; y; z)$ обчислюється за формулою:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Приклад 4. Знайти du , якщо $u = x^{y^2z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2z} \ln x \cdot 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2z} \ln x \cdot y^2.$$

Отже, $du = y^2 z x^{y^2z-1} dx + 2yz x^{y^2z} \ln x dy + y^2 x^{y^2z} \ln x dz$.

Приклад 5. Знайти dz , якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$dz = z'_x dx + z'_y dy$, де

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y}; \quad z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}.$$

Отже, $dz = \frac{1}{x + \ln y} \left(dx + \frac{1}{y} dy \right)$.

Геометричний зміст частинних похідних. Якщо функцію $z = f(x; y)$, що має частинні похідні в точці $(x_0; y_0)$, розглядати за умови $y = y_0$, то геометрично це означає, що поверхня $z = f(x; y)$ перетинається площиною $y = y_0$, паралельно координатній площині Oxz ; у перерізі дістаємо лінію. Тоді $f'_x(x_0; y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до зазначеного перерізу в точці $(x_0; y_0)$, тобто тангенсом кута нахилу цієї дотичної до додатного напрямку осі Ox .

Аналогічно f'_y є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проходить через точку $(x_0; y_0)$, до кривої, яка утворюється в результаті перетину поверхні $z = f(x; y)$ з площиною $x = x_0$.

6.3. Достатня умова диференційованості функції двох змінних у точці

Для функції однієї змінної твердження щодо її диференційованості та існування похідної є рівносильними. У випадку функції двох змінних маємо: існування частинних похідних — необхідна умова диференційованості функції в точці, але не є достатньою умовою диференційованості. Наприклад, для функції

$$z = f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

у точці $(0; 0)$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Оскільки ця функція є розривною у точці $(0; 0)$, тому функція не може бути диференційованою в цій точці. Таким чином, для диференційованості функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ недостатньо тільки існування частинних похідних, потрібно додатково вимагати неперервності частинних похідних, що впливає з поданої далі теореми.

Теорема 1. Якщо функція $z = f(x; y)$ у деякому околі точки $(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційована в точці $(x_0; y_0)$.

Зауваження. Можна навести твердження про зв'язок між поняттями неперервності і диференційованості функції двох змінних у точці, аналогічні до тих, що виконуються для функції однієї змінної.

Теорема 2. Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то вона неперервна в цій точці. Обернене твердження неправильне.

6.4. Диференціювання складної функції

Теорема. Нехай на множині D визначена складна функція $z = f(u; v)$, де $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, і нехай функції $u(x; y)$, $v(x; y)$, мають у деякому околі точки $(x_0; y_0) \in D$ неперервні частинні похідні, а функція $z = f(u; v)$ — неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0; v_0)$, де $u_0 = u(x_0; y_0)$, $v_0 = v(x_0; y_0)$. Тоді складна

функція $z = f(u(x; y); v(x; y))$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = (\sqrt[3]{xy})^2 + \left(\sqrt[5]{\frac{x}{y}}\right)^3$.

Маємо $z = u^2 + v^2$, де $u = \sqrt[3]{xy}$, $v = \sqrt[5]{\frac{x}{y}}$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \frac{\partial z}{\partial u} &= 2u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt[3]{y} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[5]{y}} \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{5} \sqrt[5]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{y^6}}. \end{aligned}$$

$$\text{Таким чином, } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{3} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} + \frac{2v^2}{5\sqrt[5]{x^4 y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{3} \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} - \frac{3v^2}{5} \sqrt[5]{\frac{x}{y^6}}, \text{ або після}$$

підставлення виразів u і v дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} + \frac{3}{5} \sqrt[5]{\frac{1}{x^2 y^3}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} - \frac{3}{5} \sqrt[5]{\frac{x^3}{y^8}}.$$

6.5. Дотична площина та нормаль

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то виконується рівність

$$\Delta z \approx A \Delta x + B \Delta y,$$

або

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0) \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \Delta y.$$

Узявши в цій наближеній рівності $a = x_0 + \Delta x$, $b = y_0 + \Delta y$, дістанемо:

$$f(a; b) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(b - y_0). \quad (6.1)$$

На формулі (6.1) ґрунтується алгоритм використання диференціала для наближених обчислень.

Крім того, якщо в рівності (6.1) взяти $a = x$, $b = y$, дістанемо

$$z = f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Це рівняння дотичної площини, що проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$.

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F(x; y; z)$, то рівняння дотичної площини до поверхні в точці має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (6.2)$$

де $A = F'_x(x_0; y_0; z_0)$, $B = F'_y(x_0; y_0; z_0)$, $C = F'_z(x_0; y_0; z_0)$.

Нормаль до поверхні в точці $(x_0; y_0; z_0)$ — це пряма, що проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини. Отже, її рівняння

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}.$$

6.6. Похідна за напрямом. Градієнт

Означення. Нехай $z = f(x; y)$ функція визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$; l — деякий промінь з початком у точці $P_0(x_0; y_0)$; $P(x; y)$ — точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається (рис. 27); Δl — довжина відрізка P_0P . Границя $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається *похідною функції $z = f(x; y)$ за напрямом $\vec{l}$ у точці P_0* і позначається $\frac{\partial z}{\partial l}$.

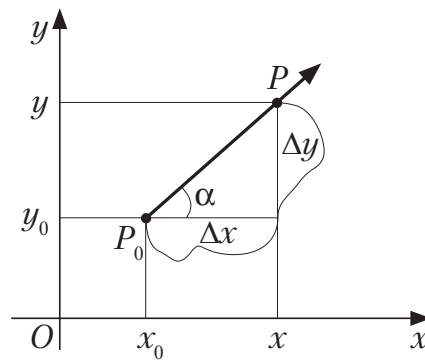


Рис. 27

Зокрема, $\frac{\partial z}{\partial x}$ є похідна функції $z = f(x; y)$ за додатним напрямом осі Ox , а $\frac{\partial z}{\partial y}$ — похідна функції за додатним напрямом осі Oy .

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ характеризує швидкість змінювання функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ має в точці $P_0(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ за будь-яким напрямом $\vec{l} = (\cos \alpha; \cos \beta)$, причому

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0} \cos \beta,$$

де $\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{P_0}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{P_0}$ — значення частинних похідних функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2$ у точці $(1; 1)$ за напрямом $\vec{l} = (\cos 30^\circ; \cos 60^\circ)$

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1; 1)$ функції $u = x^2 + y^2$:

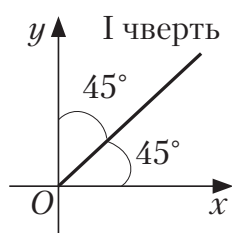
$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(1;1)} = 2x\bigg|_{(1;1)} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(1;1)} = 2y\bigg|_{(1;1)} = 2.$$

Тоді за формулою похідної за напрямом дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 2 \cos 30^\circ + 2 \cos 60^\circ = 1 + \sqrt{3}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $z = \arctg xy$ у точці $(1; 1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

Знайдемо значення z'_x, z'_y у точці $(1; 1)$:



$$z'_x\bigg|_{(1;1)} = \frac{y}{1+x^2y^2}\bigg|_{(1;1)} = \frac{1}{2},$$

$$z'_y\bigg|_{(1;1)} = \frac{x}{1+x^2y^2}\bigg|_{(1;1)} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{1}{2} \cos 45^\circ + \frac{1}{2} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Означення. Вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$, називається *градієнтом функції* $z = f(x; y)$ у цій точці і позначається $\overrightarrow{\text{grad}} z$ ($\vec{i}, \vec{j}$ — одиничні орти):

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{P_0} \vec{j}.$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u = u(x; y; z)$ похідна за напрямом $\vec{l} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ подається у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\bigg|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{P_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{P_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{P_0} \cos \gamma.$$

Для функції трьох змінних $u = u(x; y; z)$ градієнт у точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$ визначається так:

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0} \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні орти і $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0}, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0}, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0}$ обчислені в точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

Похідна за напрямом $\vec{l}$ функції $z = f(x; y)$ та градієнт пов'язані співвідношенням $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{\text{grad}} z \cdot \vec{l}$.

Приклад 3. Знайти градієнт функції $u = 4 - x^2 - 2y^2 - xy + z^2y^2$ у точці $(1; 2; -1)$.

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1; 2; -1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1; 2; -1)} = (-2x - y) \Big|_{(1; 2; -1)} = -4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1; 2; -1)} = (-4y - x + 2z^2y) \Big|_{(1; 2; -1)} = -2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1; 2; -1)} = 2z^2y \Big|_{(1; 2; -1)} = -8.$$

Тоді $\overrightarrow{\text{grad}} u = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$.

Приклад 4. Знайти точки, в яких модуль градієнта функції $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ дорівнює 2.

Знайдемо z'_x і z'_y :

$$z'_x = \frac{3}{2} \cdot 2x(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad z'_y = \frac{3}{2} \cdot 2y(x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Модуль градієнта дорівнює 2 в деякій точці $(x_0; y_0)$:

$$|\text{grad } z| = 2 = \sqrt{9x_0^2(x_0^2 + y_0^2) + 9y_0^2(x_0^2 + y_0^2)} = 3(x_0^2 + y_0^2).$$

Отже, $x_0^2 + y_0^2 = \frac{3}{2}$, тобто в точках кола з центром у точці $(0; 0)$ і радіусом $\sqrt{\frac{3}{2}}$ модуль градієнта заданої функції дорівнює 2.

6.7. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x; y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D . Візьмемо будь-яку точку $(x; y) \in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$

і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y , тобто вони є функціями двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їхніх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ або } z''_{xx}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ або } z''_{yy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ або } z''_{xy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ або } z''_{yx}.\end{aligned}$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

Означення. Диференціалом другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків:

$$\begin{aligned}d^3 z &= d(d^2 z) \\ &\dots\dots\dots \\ d^n z &= d(d^{n-1} z).\end{aligned}$$

Приклад 1. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

Знайдемо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \cos x \sin y, & \frac{\partial z}{\partial y} &= \sin x \cos y, & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\sin x \sin y, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \cos x \cos y, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\sin x \sin y,\end{aligned}$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2 \cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Приклад 2. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

Знайдемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$$

Приклад 3. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.
Знайдемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy \sin(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy \sin(x^2 + y^2).$$

У попередньому прикладі визначено, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Виявляється, що ця рівність виконується в багатьох випадках, що впливає з цієї теореми.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y , а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

6.8. Похідна неявної функції

Якщо існує неперервна функція однієї змінної $y = f(x)$, така, що відповідні пари $(x; y)$ задовольняють умову $F(x; y) = 0$, тоді ця умова називається *неявною формою функції $f(x)$* , а сама функція називається *неявною функцією*, яка задовольняє умову $F(x; y) = 0$.

Припустімо, що неперервна функція $y = f(x)$ задана в неявній формі $F(x; y) = 0$ і що $F'_y(x; y) \neq 0$. Похідну $\frac{dy}{dx}$ обчислюємо за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad F'_y(x, y) \neq 0.$$

Приклад 1. Знайти похідну від неявної функції $y^5 + 2x^2y^2 + xy - 42 = 0$ в точці $x = 1, y = 2$.

Маємо $F'_x = 4xy^2 + y$, $F'_y = 5y^4 + 4x^2y + x$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy^2 + y}{5y^4 + 4x^2y + x}.$$

$$\text{Для } x = 1, y = 2 \text{ маємо } \frac{dy}{dx} = -\frac{18}{89}.$$

Аналогічно частинні похідні функції двох незалежних змінних $z = f(x; y)$, яку задано за допомогою рівняння $F(x; y; z) = 0$, де $F(x; y; z)$ — диференційована функція змінних x, y, z , можуть бути обчислені за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (6.3)$$

за умови, що $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Приклад 2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3 - 3xyz = 5$.

У даному разі $F(x; y; z) = z^3 - 3xyz - 5$. Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Тоді за формулами (6.3)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

6.9. Формула Тейлора для функції двох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x; y)$. Припустімо, що в околі деякої заданої точки $(x_0; y_0)$ ця функція має неперервні похідні всіх порядків до $n + 1$ включно. Надамо x_0 і y_0 деяких приростів Δx і Δy так, щоб прямолінійний відрізок, який сполучає точки $(x_0; y_0)$ і $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, не вийшов за межі околу, що розглядається. Тоді

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0; y_0) &= f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = df(x_0; y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0; y_0) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0; y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \Delta x \cdot \theta; y_0 + \theta \Delta y), \quad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0; y_0) &= [f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y] + \\ &+ \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0; y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0; y_0)(\Delta y)^2] + \\ &+ \frac{1}{3!}[f'''_{xxx}(x_0; y_0)(\Delta x)^3 + 3f'''_{x^2y}(x_0; y_0)(\Delta x)^2\Delta y + 3f'''_{xy^2}(x_0; y_0)\Delta x(\Delta y)^2 + \\ &+ f'''_{yyy}(x_0; y_0)(\Delta y)^3] + \dots + O(\rho'''), \end{aligned}$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Це формула Тейлора для функції двох незалежних змінних.

6.10. Поняття визначника Якобі (якобіан)

Важливим формальним засобом дослідження є визначники, утворені з частинних похідних.

Нехай дано функцій від змінних

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1; x_2; \dots; x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1; x_2; \dots; x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(x_1; x_2; \dots; x_n), \end{aligned}$$

що визначені в деякій n -вимірній області D і мають у цій області неперервні похідні за всіма змінними. Складемо з цих похідних визначник

$$J = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Цей визначник називають *функціональним визначником Якобі*, або *якобіаном, системи функції* $y_1 = f_1(x_1; x_2; \dots; x_n)$ ($i = \overline{1, n}$). Якобіан має властивості, які подібні до властивостей звичайної похідної. Якобіан використовують при обчисленні кратних інтегралів, при заміні змінної тощо.

Зауваження. Матрицю

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей Якоби*.

6.11. Матриця Гессе. Гессіан

Нехай задано функцію $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка двічі неперервно диференційована за змінними x_s ($s = \overline{1, n}$).

Означення. Матриця

$$H = (f_{ij}) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

або

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею Гессе*.

Приклад. Для функції $z = x_1 x_2^{-1}$ дістанемо матрицю Гессе:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -x_2^{-2} \\ -x_2^{-2} & 2x_1 x_2^{-3} \end{pmatrix}.$$

Поняття матриці Гессе відіграє важливу роль для знаходження екстремумів функції двох та більше змінних.

Визначник, що відповідає матриці Гессе, називається *гессіаном*.

6.12. Ротор, дивергенція

Уперше поняття оператора $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ було введено У. Р. Гамільтоном, який він назвав *оператором “набла”* і позначив через ∇ .

Користуючись цим позначенням, можна записати, що $\text{grad } u = \nabla u$.

Якщо двічі застосувати оператор ∇ до функції u , дістанемо

$$\nabla(\nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

так званий *оператор Лапласа*.

Означення. Скалярний добуток оператора ∇ на векторну функцію $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z)$ називається *дивергенцією* і обчислюється за формулою:

$$\nabla \cdot \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \text{div } \vec{W}.$$

Означення. Векторний добуток оператора ∇ на векторну функцію $\vec{W}$ називається *ротором* і обчислюється за формулою:

$$\nabla \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{W}.$$

6.13. Економічний зміст частинних похідних

Аналогічно поняттю еластичності функції однієї змінної можна ввести поняття *частинних еластичностей функції двох змінних*.

Припустімо, що функції $x_1 = f_1(p_1; p_2)$ і $x_2 = f_2(p_1; p_2)$ виражають попит на товари A і B , який залежить від ціни на ці товари. Частинні еластичності попиту відносно цін p_1 і p_2 подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & E_{12} &= \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, \\ E_{21} &= \frac{p_1}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & E_{22} &= \frac{p_2}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2}. \end{aligned}$$

Частинна еластичність E_{11} попиту на товар A відносно ціни товару B приблизно означає відсоток підвищення (або зниження) попиту на товар A , якщо ціна товару A зростає на 1 %, а товару B залишається незмінною.

Частинна еластичність E_{12} попиту на товар A відносно ціни товару B приблизно означає відсоток підвищення (або зниження) попиту на товар A , якщо ціна товару B зростає на 1 %, а товару A залишається без змін, і т. ін.

Приклад. Припустімо, що функція попиту на товар A є

$$x_1 = f_1(p_1; p_2) = 25 - 2p_1 + p_2.$$

Знайти частинні показники еластичностей.

$$\text{Маємо } E_{11} = \frac{-2p_1}{25 - 2p_1 + p_2}, \quad E_{12} = \frac{p_2}{25 - 2p_1 + p_2}.$$

$$\text{Для } p_1 = 3, p_2 = 1 \text{ дістаємо } E_{11} = -\frac{6}{20} = -0,3.$$

Це означає, що коли ціна товару A зростає на 1 %, а товару B залишається без змін, тоді попит на товар знижується на 0,3 %. Далі $E_{12} = \frac{1}{20} = 0,05$, тобто якщо ціна товару B зростає на 1 % при незмінній ціні товару A , попит на товар A зростає приблизно на 0,05 %.

6.14. Екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x; y)$ цього околу виконується нерівність $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$ [$f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$], тоді ця точка $(x_0; y_0)$ називається *точкою максимуму (мінімуму)* функції $z = f(x; y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема 1. (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці $(x_0; y_0)$, тоді в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.

Теорема 2. (достатня умова екстремуму). Нехай функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці $(x_0; y_0)$ і має неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x = 0$ та $f'_y = 0$, а також $f''_{x^2}(x_0; y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0; y_0) = B$, $f''_{y^2}(x_0; y_0) = C$. Тоді, якщо:

- 1) $AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, тоді $(x_0; y_0)$ *точка максимуму функції* $z = f(x; y)$;
- 2) $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, тоді $(x_0; y_0)$ *точка мінімуму функції* $z = f(x; y)$;
- 3) $AC - B^2 < 0$, тоді в точці $(x_0; y_0)$ *немає екстремуму*.
- 4) $AC - B^2 = 0$, тоді *потрібні додаткові дослідження*.

Алгоритм дослідження функції $z = f(x; y)$ на екстремум:

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.
5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на базі теореми 2.

Приклад 1. Розглянемо функцію $f(x; y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

1. Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8 - 4y$.
2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що
$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 8 - 4y = 0 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x = 1$, $y = 1$. Таким чином, у точці $(1; 2)$ функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, звідки дістаємо, що $\Delta = 8$.

4. Як впливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці $(1; 2)$ існує. Це максимум, бо $\Delta < 0$.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \quad (a > 0, b > 0).$$

Знайдемо z'_x та z'_y :

$$z'_x = \frac{x}{a}, \quad z'_y = \frac{y}{b}.$$

2. Необхідна умова екстремуму:
$$\begin{cases} \frac{x}{a} = 0 \\ \frac{y}{b} = 0 \end{cases}.$$

Отже, $(0; 0)$ — стаціонарна точка.

3. Знайдемо z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} :

$$z''_{xx} = \frac{1}{a}, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{yy} = \frac{1}{b}.$$

4. У точці $(0; 0)$

$$a_{11} = \frac{1}{a}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{b}.$$

$$\Delta = \frac{1}{ab} > 0.$$

5. Точка $(0; 0)$ — мінімум, хоча це ясно і безпосередньо.

6.15. Алгоритм знаходження екстремумів за допомогою матриці Гессе

1. Знаходимо $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$ та прирівнюємо його до $\vec{0}$.

Розв'язуємо рівняння $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0) = \vec{0}$ та знаходимо точки x_0 .

2. Складаємо матрицю Гессе

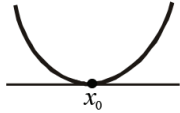
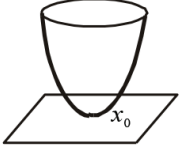
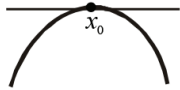
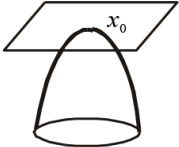
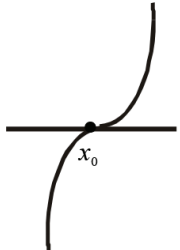
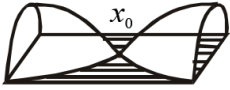
$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

та обчислюємо $\det H(x_0)$.

Можливі два випадки:

а) $\det H(x_0) = 0$. Цей випадок потребує розглядання частинних похідних порядку більше 2. Ми його розглядати не будемо.

- б) $\det H(x_0) \neq 0$.
3. Обчислюємо головні мінори $h_1, h_2, \dots$ матриці $H(x_0)$.
 Функція $f(x)$ має в точці x_0 :
- А. **мінімум**, якщо $h_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$. $f(x_0)$ — еліптична;
- Б. **максимум**, якщо $h_k \begin{cases} < 0 \text{ для } k \text{ — непарного} \\ > 0 \text{ для } k \text{ — парного} \end{cases}, f(x_0)$ — еліптична;
- В. **Сідлова точка**, якщо у випадках А і В $\det H \neq 0$ знаки h_k не упорядковані, $f(x_0)$ — гіперболічна.

А. Мінімум			$\text{grad } f(x_0 H(x_0))$ — додатно визначена.
Б. Максимум			$\text{grad } f(x_0 H(x_0))$ — від'ємно визначена.
В. Сідлова точка			$\text{grad } f(x_0 H(x_0))$ — невизначена.

Приклад 1. Знайти екстремум заданої функції:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2, \quad M = M_{\max} = R^2.$$

$$1. \overline{\text{grad}} f(x) = (4x_1 - 3x_2, -3x_1 - 2x_2) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1_0} = \frac{3}{4}x_{2_0} \\ x_{1_0} = -\frac{2}{3}x_{2_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{2_0} = 0 \\ x_{1_0} = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0).$$

$$2. H(x) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = H(x_0) \equiv H.$$

$$\det H = -8 - 9 = -17 \neq 0.$$

3. $h_1 = 4 > 0, h_2 = |H| = -17 < 0 \rightarrow H$ — невизначена. Отже, точка $(0, 0)$ — сідлова точка.

Значення функції у точці $(0, 0)$: $f(x_0) \equiv f(x_1, x_2) = 0$.

Приклад 2. Знайти екстремум заданої функції:

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2, \quad M = M_{\max} = R^2.$$

$$1. \overline{\text{grad}} f(x) = (2x_1 + x_2 - 6, x_1 + 2x_2 - 3) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_{1_0} + x_{2_0} = 6 \\ x_{1_0} + 2x_{2_0} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_{2_0} = 0 \\ x_{1_0} = 3 \end{cases}.$$

$$2. \quad H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = H.$$

$$\det H = 4 - 1 \neq 0.$$

3. $h_1 = 2 > 0, h_2 = 3 > 0 \rightarrow H$ — достатньо визначена.

$x_0 = (3, 0)$ — точка мінімуму.

Приклад 3. Знайти екстремум заданої функції:

$$f(x) = (x_1 + x_2)^2, \quad M = M_{\max} = R^2.$$

$$1. \quad \text{grad } f(x) = 2(x_1 + x_2, x_1 + x_2) = (0, 0) \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

$$2. \quad H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = H(x_0) = H \Rightarrow \det H = 0.$$

$$3. \quad f(x) = (x_1 + x_2)^2 \begin{cases} = 0, & x_{2_0} = -x_{1_0} \\ > 0, & x_{2_0} \neq -x_{1_0} \end{cases} \Rightarrow \text{мінімум для } x_{2_0} = -x_{1_0}.$$

Зауваження. Розглянуто певні аналітичні ознаки для знаходження екстремумів. Існують й інші більш важливі ознаки. Однак у деяких випадках встановити, чи має функція мінімум або максимум, можна за умовою задачі.

Приклад 4. Показати, що прямокутний паралелепіпед з найбільшою бічною поверхнею є куб.

Нехай x, y, z — ребра паралелепіпеда.

Якщо V — об'єм, S — бічна поверхня паралелепіпеда, тоді

$$V = xyz, \quad S = 2(xy + yz + xz).$$

Серед змінних x, y, z дві незалежні, нехай це будуть x і y , тоді

$$z = \frac{S - 2xy}{2(x + y)}.$$

$$\text{Отже, } V = \frac{xy(S - 2y)}{2(x + y)},$$

$$V'_x = \frac{y^2}{2} \left[\frac{S - 2x^2 - 4xy}{(x + y)^2} \right] = 0, \quad V'_y = \frac{x^2}{2} \left[\frac{S - 2y^2 - 4xy}{(x + y)^2} \right] = 0.$$

Значення $x = 0, y = 0$, очевидно, не можуть дати максимуму. Отже,

$$S - 2x^2 - 4xy = 0, \quad S - 2y^2 - 4xy = 0.$$

Розв'язавши ці рівняння разом із рівнянням $S - 2xy - 2yz + 2zx = 0$, дістанемо $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$. Ці рівняння мають єдиний розв'язок, і ним визначається максимум.

Приклад 5. На площині

$$x + 2y + 3z - 14 = 0$$

знайти точку, найменш віддалену від початку координат.

Відстань деякої точки $(x; y; z)$ на заданій площині від початку координат є

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Коли ця відстань досягає мінімуму, тоді

$$dl = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

тобто

$$xdx + ydy + zdz = 0.$$

Із рівняння площини маємо:

$$dx + 2dy + 3dz = 0.$$

Координати x, y, z пов'язані тільки рівнянням площини. Отже, dx, dy, dz можуть набувати будь-яких значень, що задовольняють останнє рівняння. Із цього рівняння знайдемо dz через dx і dy і підставимо в попереднє рівняння.

Дістанемо

$$\left(x - \frac{1}{3}z\right)dx + \left(y - \frac{2}{3}z\right)dy = 0.$$

Якщо x, y, z — координати точки мінімуму, то коефіцієнти при dx, dy мають дорівнювати 0:

$$x - \frac{1}{3}z = 0, \quad y - \frac{2}{3}z = 0.$$

Отже, $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, враховуючи, що точка $(x; y; z)$ лежить на площині $x + 2y + 3z - 14 = 0$, матимемо, що точка $(1; 2; 3)$ дає шуканий мінімум.

6.16. Економічні задачі

Задача 1.

А. Виробнича функція Кобба–Дугласа має вигляд $Y = K^\alpha \text{const } L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Перевірте, чи відповідає виробнича функція припущенням:

- 1) перші похідні додатні;
- 2) похідні другого порядку від'ємні;
- 3) мішані похідні зникають.

В. Перевірити умови 1)–3) для функції $Y = K^\alpha + L^{1-\alpha}$.

Розв'язання.

А. 1) $\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} \text{const } L^{1-\alpha},$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1 - \alpha) K^\alpha \text{const} L^{-\alpha}.$$

При $\alpha \in (0; 1)$ $\frac{\partial Y}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial L} > 0$;

$$2) \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = (\alpha^2 - \alpha) K^{\alpha-2} \text{const} L^{1-\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = (\alpha^2 - \alpha) K^\alpha \text{const} L^{-\alpha-1}.$$

При $\alpha \in (0; 1)$ $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$;

$$3) \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 Y}{\partial L \partial K} = (\alpha^2 - \alpha) K^{\alpha-1} \text{const} L^{-\alpha} \neq 0.$$

Мішані похідні не зникають.

В. При $\alpha \in (0; 1)$ маємо: 1) $\frac{\partial Y}{\partial K} = L K^{\alpha-1} > 0$;

$$2) \frac{\partial Y}{\partial L} = (1 - \alpha) L^{-\alpha} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -\alpha(1 - \alpha) L^{-\alpha-1} < 0;$$

$$3) \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 Y}{\partial L \partial K} = 0.$$

Припущення 1)–3) функція задовольняє.

Задача 2. Задано функцію прибутку

$$P = 6(K^{0,75} + L^{0,25}) - 1,5K - 0,6L.$$

Обчислити попит на робочу силу, інвестиційний попит і товарну пропозицію за умови, що початковий капітал K_0 дорівнює 16.

Розв'язання. Продиференціюємо функцію за L і K . Прирівнювання похідних до нуля дасть змогу визначити значення використаної робочої сили і капіталу:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 4,5L^{-0,25} - 1,5 = 0 \Rightarrow L = 81;$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 3K^{-0,5} - 0,6 = 0 \Rightarrow K = 25.$$

Товарну пропозицію дістанемо, підставивши знайдені значення L і K на початок періоду у виробничу функцію.

Інвестиційний попит — це різниця між значеннями кінцевого і початкового капіталу:

$$Y = 81^{0,75} + 16^{0,5} \Rightarrow Y = 31;$$

$$I = K - K_0 = 25 - 16 = 9.$$

Задача 3. Нехай реальний грошовий попит народного господарства описується рівнянням $\frac{M}{P} = \exp(-\alpha\pi^e)$, де $\alpha > 0$, $\alpha = \text{const}$, π^e — очікуваний індекс інфляції. При цьому реальний грошовий обіг при зростаючій інфляції знижується, оскільки з інфляцією зростають можливі витрати грошей. Обчислити фактичний індекс інфляції $\pi = \left(\frac{dp}{dt}\right) : P$ (при цьому реальні прибутки передбачаються незмінними). Чи збігається він з темпом зростання грошової маси?

Вказівка. Логарифмічним диференціюванням за часом дістаємо:

$$\frac{d(\ln P)}{dt} = \pi.$$

Розв'язання. Прологарифмуємо рівняння грошового попиту:

$$\ln M - \ln P = -\alpha\pi^e.$$

Згідно з правилом логарифмічного диференціювання похідна за часом має вигляд

$$\frac{d(\ln M)}{dt} - \frac{d(\ln P)}{dt} = -\alpha \frac{d\pi^e}{dt}.$$

Підставивши $\frac{d(\ln P)}{dt} = \frac{d(\ln M)}{dt} + \alpha \frac{d\pi^e}{dt}$ у рівняння

$$\pi = \frac{d \ln P}{dt},$$

дістанемо:

$$\pi = \frac{d(\ln M)}{dt} + \alpha \frac{d\pi^e}{dt}.$$

Індекс підвищення цін лежить вище від індексу зростання грошової маси, якщо очікуваний індекс інфляції протягом часу зростає $\left(\frac{d\pi^e}{dt} > 0\right)$. При цьому падає коефіцієнт утримання грошей і відповідно зростає швидкість обігу грошей, що має додатковий інфляційний вплив.

6.17. Основні поняття і терміни

Диференційована функція $z = f(x; y)$ — це функція, повний приріст якої Δz можна подати у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, де A, B — числа, α, β — нескінченно малі при $\alpha, \beta \rightarrow 0$.

Повний приріст — це різниця $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$, де $\Delta x, \Delta y$ — прирости, що надаються точці $(x_0; y_0)$ так, щоб точка $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі околу точки $(x_0; y_0)$.

Повний диференціал функції двох змінних — це головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$ або $z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$.

Повний диференціал функції двох змінних $z = f(x; y)$ обчислюється за формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ характеризує швидкість змінювання функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$ за напрямом $\vec{l} = (\cos \alpha; \cos \beta)$ і обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \Big|_{P_0} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \cos \beta.$$

Градiєнт — це вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0}; \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} z \Big|_{P_0} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j}.$$

Дотична площина до поверхні $F(x; y; z)$ у точці $(x_0; y_0; z_0)$ — це площина, що задана рівнянням:

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0.$$

6.18. Навчальні завдання

1. Знайти повний диференціал функції двох змінних:

$$z = \arctg \frac{x+y}{x-y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} \right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Отже } dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

2. Задано функцію $z = \ln(x^2 + 4y^2)$. Знайти $\overline{\text{grad}} z$ у точці $A(1; 1)$ і похідну за напрямом від точки $A(1; 1)$ до точки $B(6; 4)$.

Знайдемо значення частинних похідних у точці $(1; 1)$:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1;1)} = \left. \frac{2x}{x^2 + 4y^2} \right|_{(1;1)} = \frac{2}{5}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1;1)} = \left. \frac{8y}{x^2 + 4y^2} \right|_{(1;1)} = \frac{8}{5}.$$

Підставивши знайдені значення частинних похідних у вираз градієнта, дістанемо $\overline{\text{grad}} z = \frac{2}{5} \vec{i} + \frac{8}{5} \vec{j}$.

Визначимо одиничний вектор $\vec{e}$, за напрямом якого обчислюється похідна:

$$\vec{e} = \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \vec{i} + \frac{3}{\sqrt{34}} \vec{j}.$$

Знайдемо шукану похідну за напрямом:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A e_x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A e_y = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

3. Знайти dz , якщо $xyz = x + y + z$.

Як відомо, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, тож спочатку знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Функція $F(x, y, z) = xyz - x - y - z$, тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy - 1.$$

За формулами (6.3) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz - 1}{xy - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 1}{xy - 1}.$$

Отже, $dz = -\frac{1}{xy - 1} [(yz - 1)dx + (xz - 1)dy]$.

4. Знайти якобіан перетворення з координатними функціями $y_1 = 2 \cos x_1 \cos x_2$, $y_2 = 2 \cos x_1 \sin x_2$, $y_3 = \sqrt{2} \sin x_3$.

Координатні функції неперервно диференційовані, а отже, частинні похідні від них існують у кожній точці і відповідний якобіан такий:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} \cos x_3 \begin{vmatrix} \sin x_1 \cos x_2 & \sin x_2 \cos x_1 \\ \sin x_1 \sin x_2 & \cos x_1 \cos x_2 \end{vmatrix} = \\ &= 4\sqrt{2} \cos x_3 \sin x_1 \cos x_1 (\cos^2 x_2 - \sin^2 x_2) = 2\sqrt{2} \cos x_3 \sin 2x_1 \cos 2x_2. \end{aligned}$$

5. Знайти рівняння дотичних площин до поверхні

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

у точках перетину її з прямою $x = y = 2$.

Пряма перетинає поверхню в точках $A(2; 2; 3)$ і $B(2; 2; -3)$. Знайдемо частинні похідні функції $F = x^2 + y^2 - z^2 + 1$ в цих точках:

$$F'_x|_A = 4, \quad F'_y|_A = 4, \quad F'_z|_A = -6,$$

$$F'_x|_B = 4, \quad F'_y|_B = 4, \quad F'_z|_B = 6.$$

За формулою (6.2) дістанемо:

$$4(x-2) + 4(y-2) - 6(z-3) = 0,$$

або

$$4(x-2) + 4(y-2) + 6(z+3) = 0,$$

$$2x + 2y - 3z + 1 = 0,$$

$$2x + 2y + 3z + 1 = 0.$$

6.19. Завдання для перевірки знань до теми диференційованість функції двох змінних

1. Знайти частинні похідні першого порядку:

1) $u = xy + yz + zx$;

2) $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$;

3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

4) $u = \frac{y}{z} + \arctg \frac{z}{x} + \arctg \frac{x}{z}$;

5) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^2$;

6) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

8) $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

9) $z = e^{\frac{x}{y}}$;

10) $z = xy \ln(x + y)$;

11) $z = (1 + \log_y x)^{10}$;

12) $z = xy e^{\sin \pi^2 xy}$;

13) $z = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$;

14) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}$;

15) $z = \arcsin \frac{x+y}{xy}$;

16) $z = \arctg\left(\arctg \frac{y}{x}\right)$;

17) $u = \arctg(x - y)^z$;

18) $z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$;

19) $z = xy^3 + 3x^4y^5 + 10y^4$;

20) $z = \frac{xy^2}{x^3 + y^2}$;

$$21) z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}; \quad 22) u = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, якщо

$$f(x; y) = xy\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

3. Знайти $\Delta f(x; y)$ і $df(x; y)$ для функції $f(x; y) = x^3 - y^3$.

4. Знайти повний диференціал функції $f(x; y)$ у заданій точці, якщо:

1) $f(x; y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, а задана точка $(1; 1); (0; 1)$;

2) $f(x; y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$, а задана точка $(2; 1)$;

3) $f(x; y) = \frac{\cos(x - 2y)}{\cos(x + 2y)}$, а задана точка $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

5. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

Відповідь: $\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right)\bigg|_M = \frac{7}{5}$.

6. Знайти абсолютну величину і напрям градієнта функції $u = \frac{1}{r}$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ у точці $M(x_0; y_0; z_0)$.

Відповідь: $|\text{grad } u|_M = \frac{1}{r_0^2}$, $\cos \alpha = -\frac{x_0}{r_0}$, $\cos \beta = -\frac{y_0}{r_0}$, $\cos \gamma = -\frac{z_0}{r_0}$,

$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

7. Знайти y' , якщо $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$.

Відповідь: $y' = -\frac{x}{y}$.

8. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x + y + z = e^z$.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + y + z - 1}$.

8⁰. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, якщо $z = x + \arctg \frac{y}{z - x}$.

Відповідь: 1.

9. Знайти похідну функції f у точці M за заданим напрямом $\vec{l}$, якщо:

1) $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{l}$ — напрям зовнішньої нормалі до кола $x^2 + y^2 = 2x$ у точці M ;

2) $f(x, y) = \tg xz$, $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 1\right)$ за напрямом градієнта функції $f(x, y) = \sin yz$ у точці M .

10. Записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

1) $z = xy$, $(2; 1; 2)$;

2) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(0; 1; 0)$;

3) $z = e^{x \cos y}$, $(1; 0; e)$;

4) $xy^2 + z^3 = 12$, $(1; 2; 2)$;

5) $e^z - z + xy = 3$, $(2; 1; 0)$;

6) $z = y + \ln\left(\frac{x}{z}\right)$, $(1; 1; 1)$;

7) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $(1; 2; -1)$;

8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(x_0; y_0; z_0)$;

9) $z = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $\left(1; 1; \frac{5}{4}\right)$;

10) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $(-3; 4; 17)$.

10⁰. Записати рівняння дотичних площин до поверхонь, які паралельні даній прямій або площині:

1) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, $x - y + 2z = 0$;

2) $z^2 + xy + xz = 1$, $x - y + 2z = 1$;

3) $x^2 - y^2 = 3z$, $M(0; 0; -1)$, $x = 2y = z$;

4) $90x^2 + 160y^2 + 576z^2 = 2880$, $M(12; -3; -1)$, $x = 0$, $y = 0$.

11. Знайти абсолютну величину градієнта функції $f(x; y; z)$ у точці $(2; 1; 2)$.

$$f(x; y; z) = 10^{-3} \sin\left(\pi 10^6 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

12. Знайти кут між градієнтами функції $f(x; y)$ у точках A і B , якщо:

1) $f(x; y) = \ln\left|\frac{y}{x}\right|$, $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $B(1; -1)$;

2) $f(x; y) = \arcsin \frac{x}{x+y}$, $A(1; 1)$, $B(3; 4)$.

13. Знайти якобіан відображення:

1) $u = x(x^2 - 3y^2)$, $v = y(3x^2 - y^2)$;

2) $u = e^x \cos y$, $v = e^{-x} \sin y$.

14. Знайти частинні похідні другого порядку функції $f(x; y)$, якщо:

1) $f(x; y) = e^{xy}$; 2) $f(x; y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$;

3) $f(x; y) = \frac{x}{x+y}$; 4) $f(x; y) = (xy)^{x+y}$;

5) $f(x; y) = e^{xe^y}$; 6) $f(x; y) = \sin^2(ax+b)$;

7) $f(x; y) = y^{\ln x}$; 8) $f(x; y) = \frac{x-y}{x+y}$;

9) $f(x; y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 10) $f(x; y) = \arcsin(xy)$.

15. Знайти диференціал другого порядку функції $z = f(x; y)$, якщо:

1) $f(x; y) = x(1+y)$; 2) $f(x; y) = \frac{1}{y} e^{xy}$;

3) $f(x; y) = y \ln x$; 4) $z = \ln(x-y)$;

5) $z = \frac{1}{2(x^3 + y^2)}$; 6) $z = x \sin^2 y$;

7) $z = e^{x^2 y}$; 8) $z = \sin(4x + 2y)$;

9) $z = \sin(x^3 + y^2)$; 10) $z = x \ln(xy)$;

11) $z = x^3 \sin y + y^3 \sin x$; 12) $z = e^{x^2} \sin y^2$;

13) $z = (x^2 + y^2) e^{x+y}$; 14) $z = xy e^{x+y}$;

15) $z = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$.

16. Розкласти за формулою Тейлора функцію $f(x; y)$ в околі точки M :

1) $f(x; y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $M(-2; -1)$;

2) $f(x; y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$, $M(1; -2)$.

Розділ 7

МНОЖИННА РЕГРЕСІЯ

7.1. Модель множинної регресії

На будь-який економічний показник найчастіше впливає не один, а кілька факторів. Наприклад, попит на деяке благо визначається не тільки ціною даного блага, а й цінами на заміщаючі та доповнюючі блага, доходом споживачів та багатьма іншими факторами. У цьому випадку замість парної регресії розглядається множинна регресія:

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_p). \quad (7.1)$$

Множинна регресія широко використовується у процесі вирішення проблем попиту, дохідності акцій, щодо функції витрат виробництва, у макроекономічних розрахунках й інших питаннях економіки. На сьогодні множинна регресія — один із найпоширеніших методів в економетриці. Основною метою множинної регресії є побудова моделі з великою кількістю факторів, а також визначення впливу кожного фактора окремо і сукупного їх впливу на показник, що моделюється.

Множинний регресійний аналіз є розвитком парного регресійного аналізу у випадках, коли залежна змінна пов'язана більш як з однією незалежною змінною. Більшість аналізу є безпосереднім розширенням парної регресійної моделі, однак при цьому з'являються і деякі нові проблеми, з яких на увагу заслуговують дві. Перша проблема стосується дослідження впливу конкретної незалежної змінної на залежну змінну, а також розмежування її впливу та впливу інших незалежних змінних. Другою важливою проблемою є специфікація моделі, яка полягає в тому, що необхідно відповісти на питання, які фактори мають бути включені до регресії (7.1), а які виключені з неї. Надалі виклад загальних питань множинного регресійного аналізу вестимемо, розмежовуючи ці проблеми. Тому спочатку вважатимемо, що специфікація моделі правильна.

Найуживанішою і найпростішою з моделей множинної регресії є лінійна модель множинної регресії:

$$y = \alpha' + \beta'_1 x_1 + \beta'_2 x_2 + \dots + \beta'_p x_p + \varepsilon. \quad (7.2)$$

За математичним змістом коефіцієнти β'_j у рівнянні (7.2) дорівнюють частковим похідним результативної ознаки y за відповідними факторами:

$$\beta'_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad \beta'_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \beta'_p = \frac{\partial y}{\partial x_p}.$$

Параметр α називається вільним членом і визначає значення y в разі, коли всі пояснюючі змінні дорівнюють нулю. Однак, як і у випадку парної регресії,

фактори за своїм економічним змістом часто не можуть набувати нульових значень, тож значення вільного члена не має економічного сенсу. При цьому, на відміну від парної регресії, значення кожного регресійного коефіцієнта β'_j односередньої зміни y зі збільшенням x_j однією одиницею лише за умови, що й інші чинники залишилися незмінними. Величина ε є випадковою похибкою регресійної залежності.

Принагідно зауважимо, що найпростіше можна визначати оцінки параметрів β'_j , змінюючи лише один чинник x_j , залишаючи значення інших чинників незмінними. При цьому завдання оцінювання параметрів зводиться до послідовності завдань парного регресійного аналізу за кожним фактором. Однак такий підхід, що широко використовується в природничих дослідженнях (фізичних, хімічних, біологічних), в економіці є неприйнятним. Економіст, на відміну експериментатора — природника, позбавлений можливості регулювати окремі чинники, оскільки вдається забезпечити рівність всіх інших умов оцінки впливу одного досліджуваного чинника.

Отримання оцінок параметрів α' , β'_1 , β'_2 , ..., β'_p рівняння регресії (7.2) — одне з найважливіших завдань множинного регресійного аналізу. Найпоширенішим способом вирішення цього завдання є спосіб найменших квадратів (МНК). Його суть полягає в мінімізації суми квадратів відхилень значень, що спостерігаються залежною змінною y від її значень $\hat{y}$, одержуваних за рівнянням регресії. Оскільки параметри α' , β'_1 , β'_2 , ..., β'_p є випадковими величинами, визначити їх справжні значення за вибіркою неможливо. Тому замість теоретичного рівняння регресії (7.2) оцінюється так зване емпіричне рівняння регресії, яке можна подати у вигляді:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p + e. \quad (7.3)$$

Тут a , b_1 , b_2 , ..., b_p — оцінки теоретичних значень α' , β'_1 , β'_2 , ..., β'_p , або емпіричні коефіцієнти регресії, e — оцінка відхилення ε . Тоді розрахунковий вираз має вигляд:

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p. \quad (7.4)$$

Розглянемо **метод найменших квадратів**.

Якщо характеризується зв'язок двох ознак, то його прийнято називати *парним* або *парною лінійною регресією*. У загальному вигляді парна лінійна регресія є лінійною функцією між залежною змінною y і однією пояснюючою змінною x : $y = a_0 + a_1 x$. Це співвідношення називається теоретичною лінійною регресійною моделлю; a_0 і a_1 — теоретичні параметри (теоретичні коефіцієнти) регресії.

Для характеристики впливу змін x на варіацію y застосовують методи регресійного аналізу. В випадку парної лінійної залежності рівняння регресії має наступний вигляд:

$$\bar{y}_i = a_0 + a_1 x_i, \dots, n,$$

де n — число спостережень; a_0, a_1 — невідомі параметри рівняння; $\bar{y}_i$ — розраховане вирівняне значення результативної ознаки після підстановки в рівняння x_i .

Параметри a_0 та a_1 оцінюються за допомогою методу найменших квадратів:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 \rightarrow \min,$$

де $\bar{y}_i = a_0 + a_1 x_i$ — рівняння парної лінійної регресії; коефіцієнти a_0 та a_1 — шукані невідомі.

Таким чином, ставиться задача пошуку таких значень коефіцієнтів a_0, a_1 шуканого рівняння регресії $y = a_0 + a_1 x$, за якими забезпечується мінімум визначеного виразу:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2 \rightarrow \min.$$

Значення функції $\bar{y}_i = a_0 + a_1 x_i$ називається розрахунковим значенням і на графіку зображує теоретичну лінію регресії.

Для обчислення параметрів рівняння регресії a_0 та a_1 складають і розв'язують систему рівнянь:

$$\begin{aligned} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i, \end{aligned}$$

де параметр a_1 — це коефіцієнт регресії, що характеризує вплив зміни ознаки x на результативну ознаку y . Він показує, на скільки одиниць у середньому зміниться y при зміні x на одну одиницю. Якщо $a_0 > 0$, то спостерігається позитивний зв'язок. Якщо $a_1 < 0$, то збільшення x на одиницю спричинить зменшення y в середньому на величину a_1 . Параметр a_0 — це постійна величина в рівнянні регресії. Іноді вона характеризує початкове значення y .

Значення функції $\bar{y}_i = a_0 + a_1 x_i$ називається розрахунковим значенням і на графіку зображує теоретичну лінію регресії.

Зауваження. Треба пам'ятати, що рівняння прямої лінії $y = a_0 + a_1 x$, що розглядається, це як видима частина айсбергу — штучно виокремлена проста і зрозуміла частка повного нелінійного рівняння (поліному), загальна форма якого значно складніша і має вигляд:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Нехай є n спостережень пояснюючих змінних та відповідних їм значень результативної ознаки:

$$(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}, y_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.5)$$

Для однозначного визначення значень параметрів рівняння (7.3) обсяг вибірки n може бути не менше кількості параметрів, тобто $n \geq p + 1$. Інак-

ше значення параметрів неможливо визначити однозначно. Якщо $n = p + 1$, оцінки параметрів розраховуються єдиним чином без МНК простою підстановкою значень (7.5) у вираз (7.4). Система $(p + 1)$ рівнянь з такою самою кількістю невідомих вирішується будь-яким способом, що застосовується до систем лінійних рівнянь алгебри (СЛАУ). Проте з погляду статистичного підходу таке рішення завдання є ненадійним, оскільки виміряні значення змінних (7.5) містять різні види похибок. Тому для отримання надійних оцінок параметрів рівняння (7.4) обсяг вибірки повинен значно перевищувати кількість параметрів, що визначаються. Практично, як уже зазначалося, обсяг вибірки повинен перевищувати кількість параметрів при x_j у рівнянні (7.4) у 6–7 разів.

Для проведення аналізу в межах лінійної моделі множинної регресії необхідно виконання низку передумов МНК. В основному це ті ж передумови, що і для парної регресії, проте тут потрібно додати припущення, специфічні для множинної регресії:

Специфікація моделі має вигляд (7.2).

Відсутність мультиколінеарності: між пояснювальними змінними відсутня строга лінійна залежність, що відіграє важливу роль у відборі факторів при вирішенні проблеми специфікації моделі.

Похибки ϵ_i , $i = 1, n$ мають нормальний розподіл ($\epsilon_i \sim N(0, \sigma)$). Здійсненість цієї умови необхідне для перевірки статистичних гіпотез та побудови інтервальних оцінок.

За умови виконання всіх цих передумов має місце багатовимірний аналог теореми Гаусса – Маркова: оцінки $a, b_1, b_2, \dots, b_p$, отримані за МНК, є найбільш ефективними (в сенсі найменшої дисперсії) у класі лінійних незміщених оцінок.

Задані значення результативного показника y_i найпростіше узагальнити й оцінити за допомогою обчислення середнього значення $\bar{y}$, більш точно — з визначенням тенденції зміни цих значень — можна наблизити рівняння регресії, визначивши теоретичні значення $\tilde{y}_i$ для відповідних значень x_i .

Саме тому в регресійному аналізі знаходять і застосовують три типи значень функції для кожного значення аргументу x_i . Введемо для них нові додаткові позначення:

- a) y_i — значення функції задані (задають у таблиці);
- b) $\tilde{y}_i$ — теоретичні значення функції (обчислені за допомогою рівняння регресії);
- c) $\bar{y}$ — середні значення функції;

та наступних **відхилень** (*residual*) між ними:

- d) $(y_i - \bar{y})$ — заданого значення від середнього значення $\bar{y}$;
- e) $(y_i - \tilde{y}_i)$ — заданого значення від теоретичного (обчисленого) значення;
- f) $(\tilde{y}_i - \bar{y})$ — теоретичного (обчисленого) значення від середнього значення;

та **сум квадратів** (*sum of squares*, SS) цих відхилень:

- g) $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ заданих значень y_i від середнього значення, — це загальна (total) сума квадратів (SST);
- h) $\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2$ заданих значень y_i від теоретичного (обчисленого) значення, — це сума квадратів відхилень (або помилок, *error*), (SSE), застосовується МНК, щоб $СКВ \rightarrow \min$, тобто $\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \rightarrow \min$;
- с) $\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \bar{y})^2$, теоретичних значень від середнього значення, — це сума квадратів регресії (regression), (SSR), який прагнемо мінімізувати $\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 \rightarrow \min$. Отже: **SST = SSR + SSE** або **SSR = SST – SSE**.

(Total = Regression + Error, Загальне = Регресія + Помилка)

Пояснення:

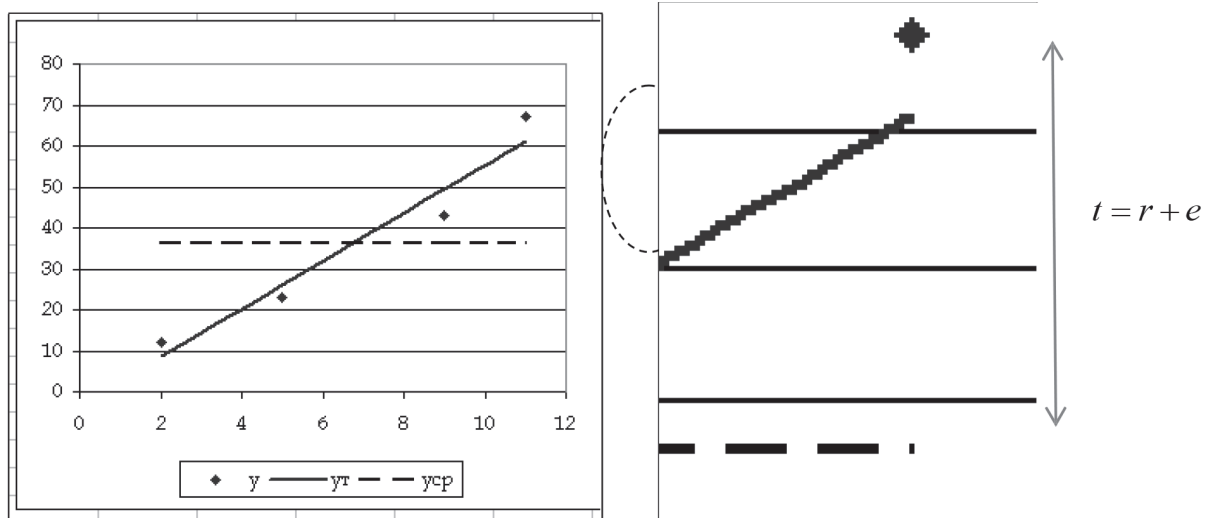


Рис. 28

Ці суми є елементами формул, за якими оцінюють якість наближення, зокрема, з їх застосуванням обчислюється коефіцієнт детермінації R^2 за формулою:

$$R^2 = \frac{Regression}{Total} = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_i (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{Error}{Total} = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}.$$

Чим ближчий коефіцієнт детермінації R^2 до 1, тим кращим є наближення заданих точок знайденим рівнянням регресії, тим більше довіри до цього рівняння для побудови прогнозу за умови, що $\frac{Error}{Total} : \rightarrow 0$.

В ідеалі, коли задані точки лежать на розрахованій лінії регресії, $Error = 0$, $R^2 = 1$ і статистичний (у середньому) зв'язок між Y та X перетворюється у функціональний (строгий, однозначний) зв'язок.

Таким чином, трійка (a_0, a_1, R^2) , яка утворена обчисленим значенням R^2 за попередньо знайденими значеннями коефіцієнтів a_0 та a_1 , є мінімальним результатом будь-якої регресії, зокрема, парної лінійної регресії, який вже дозволяє побудувати і оцінити прогноз.

7.2. Оцінка параметрів лінійного рівняння множинної регресії

Розглянемо методи розрахунку параметрів множинної лінійної регресії.

Матричний метод. Передбачає обчислення оберненої матриці. Представимо дані спостережень та параметри моделі в матричній формі:

$Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ — n -мірний вектор стовпець спостережень залежної змінної;

$B = [a, b_1, b_2, \dots, b_p]^T$ — $(p + 1)$ -мірний вектор стовпець параметрів рівняння регресії (3);

$e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$ — n -мірний вектор стовпець відхилень вибірових значень y_i від значень $\hat{y}_i$, одержаних за рівнянням (7.4).

Для зручності запису стовпці записані як рядки і тому мають штрих для позначення операції транспонування. Значення незалежних змінних запишемо у вигляді прямокутної матриці розмірності $n \times (p + 1)$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}.$$

Кожному стовпцю цієї матриці відповідає набір з n значень одного з факторів, а перший стовпець складається з одиниць, які відповідають значенням змінної при вільному члені.

У цих позначеннях емпіричне рівняння регресії виглядає так:

$$Y = XB + e. \quad (7.6)$$

Звідси вектор залишків регресії можна виразити наступним чином:

$$e = Y - XB. \quad (7.7)$$

Отже, функціонал $Q = \sum e_i^2$, який, власне, і мінімізується за МНК, можна записати як добуток вектора-рядка e^T на вектор-стовпець e :

$$Q = e^T e = (Y - XB)^T (Y - XB). \quad (7.8)$$

Відповідно до МНК диференціювання Q за вектором призводить до виразу:

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = -2X^T Y + 2(X^T X)B, \quad (7.9)$$

яке знаходження екстремуму слід прирівняти до нуля похідну $\frac{\partial Q}{\partial B} = 0$. В результаті перетворень отримуємо вираз для вектора параметрів регресії:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (7.10)$$

Тут $(X^T X)^{-1}$ — матриця, обернена до $X^T X$.

Приклад. Бюджетне обстеження п'яти випадково обраних сімей дало такі результати (у тис. грн):

Сім'я	Накопичення, S	Дохід, Y	Власність, W
1	3	40	60
2	6	55	36
3	5	45	36
4	3,5	30	15
5	1,5	30	90

Оцініть регресію S на Y і W матричним методом.

Введемо позначення:

$S = [3; 6; 5; 3,5; 1,5]'$ — вектор спостережень залежною змінною;

$B = [a; b_1; b_2]'$ — вектор параметрів рівняння регресії;

X — матриця значень незалежних змінних, для отримання якої вводиться додатковий вектор стовпець з одиниць, тобто $[1, 1, 1, \dots, 1]^T$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 40 & 60 \\ 1 & 55 & 36 \\ 1 & 45 & 36 \\ 1 & 30 & 15 \\ 1 & 30 & 90 \end{bmatrix}.$$

Далі за допомогою матричних операцій обчислюємо (використовуємо табличний процесор MS Excel та функції ТРАНСП, ММНОЖ та МОБР у ньому):

$$X^T X = \begin{bmatrix} 5 & 200 & 237 \\ 200 & 8450 & 9150 \\ 237 & 9150 & 14517 \end{bmatrix}; \quad (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5,6916 & -0,1074 & -0,0252 \\ -0,1074 & 0,0024 & 0,00024 \\ -0,0252 & 0,00024 & 0,00033 \end{bmatrix};$$

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y = (0,2787 \ 0,1229 \ -0,0294).$$

Регресійна модель у скалярному вигляді:

$$\hat{S} = 0,2787 + 0,1229Y - 0,0294W.$$

Скалярний метод. Перевагою цього методу є неможливість застосування важкої обчислювальної операції обертання матриці. При його застосуванні

будується система нормальних рівнянь, вирішення якої дозволяє отримати оцінки параметрів регресії. Для цього складають систему матричних рівнянь, яка відповідає добутку матриць $X^T X B = X^T Y$. Вона виведена з умови рівності похідної 0, тобто з умови $\frac{\partial Q}{\partial B} = 0$, де $B = (a, b_1, b_2, \dots, b_p)$ — $(p + 1)$ -вимірний вектор.

Якщо маємо p незалежних регресорів або p параметрів регресії і n різних спостережень, тоді систему можна записати так:

$$\begin{cases} an + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_{ip} = \sum_{i=1}^n y_{i1} \\ a \sum_{i=1}^n x_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} x_{i1} + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{i1} = \sum_{i=1}^n y_{i2} x_{i1} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a \sum_{i=1}^n x_{ip} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ip} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} x_{ip} + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_{ip}^2 = \sum_{i=1}^n y_{ip} x_{ip} \end{cases} \quad (7.11)$$

Усі суми поставлено, як у першій сумі, і визначено її межі від 1 до n . Де x_{i1} — це числове значення, яке отримане у i -тому спостереженні за 1-им параметром, аналогічно x_{ij} — числове значення отримане під час i -го спостереження за j -им параметром, тобто індекс j — це номер параметра у векторі параметрів регресії.

Вирішити цю систему можна будь-яким відповідним способом, наприклад методом визначників або методом Гаусса. При невеликій кількості визначених параметрів використання визначників краще.

Повернімося до прикладу про **бюджетне обстеження п'яти випадково обраних сімей**. Тут для двох факторів, Y — дохід та W — власність і при цьому кількість спостережених сімей $n = 5$, систему нормальних рівнянь буде записано так:

$$\begin{cases} an + b_1 \sum_{i=1}^5 Y_i + b_2 \sum_{i=1}^5 W_i = \sum_{i=1}^5 S_i \\ a \sum_{i=1}^5 Y + b_1 \sum_{i=1}^5 Y_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^5 W_i Y_i = \sum_{i=1}^5 S_i Y_i \\ a \sum_{i=1}^5 W + b_1 \sum_{i=1}^5 Y W_i + b_2 \sum_{i=1}^5 W_i^2 = \sum_{i=1}^5 S_i W_i \end{cases}$$

Розрахувавши значення сум, отримаємо:

$$\begin{cases} 5a + 200b_1 + 237b_2 = 19 \\ 200a + 8450b_1 + 9150b_2 = 825 \\ 237a + 9150b_1 + 14517b_2 = 863,5 \end{cases}$$

Для розрахування значення визначників цієї системи, використовуємо функцію МДЕТЕР в Excel:

$$\Delta = 6842700; \Delta_a = 1903325; \Delta_{b_1} = 840825; \Delta_{b_2} = -201225.$$

Звідси отримаємо оцінки параметрів моделі:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{1903325}{6842700} = 0,2787;$$

$$b_1 = \frac{\Delta_{b_1}}{\Delta} = \frac{840825}{6842700} = 0,1229;$$

$$b_2 = \frac{\Delta_{b_2}}{\Delta} = \frac{-201205}{6742700} = -0,0294.$$

Зверніть увагу, що коефіцієнти у лівій частині системи нормальних рівнянь збігаються з відповідними елементами матриці $X^T X$.

7.3. Регресійна модель у стандартизованому масштабі

Рівняння регресії у стандартизованому масштабі має вигляд:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \dots + \beta_p t_{x_p} + \varepsilon, \quad (7.12)$$

де $t_y, t_{x_1}, t_{x_2}, \dots, t_{x_p}$ — стандартизовані змінні:

$$t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad t_{x_j} = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7.13)$$

для яких середнє значення рівняється нулю: $\bar{t}_y = \bar{t}_{x_1} = \bar{t}_{x_2} = \dots = \bar{t}_{x_p} = 0$, а середнє квадратичне відхилення дорівнює одиниці: $\sigma_y = \sigma_{t_{x_j}} = 1, j = \overline{1, n}$; β_j — стандартизовані коефіцієнти регресії, або β -коефіцієнти (не слід плутати їх з параметрами рівняння (7.2)).

Застосовуючи МНК до рівняння (7.12), після відповідних перетворень отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 r_{x_2 x_1} + \beta_3 r_{x_3 x_1} + \dots + \beta_p r_{x_p x_1} = r_{y x_1} \\ \beta_1 r_{x_1 x_2} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_3 x_2} + \dots + \beta_p r_{x_p x_2} = r_{y x_2} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \beta_1 r_{x_1 x_p} + \beta_2 r_{x_2 x_p} + \beta_3 r_{x_3 x_p} + \dots + \beta_p = r_{y x_p} \end{cases} \quad (7.14)$$

У цій системі $r_{y x_j}, r_{x_i x_j}, i, j = \overline{1, p}$ — елементи розширеної матриці парних коефіцієнтів кореляції або, інакше кажучи, коефіцієнти парної кореляції між різними факторами або між факторами та результативною ознакою. Маючи виміряні значення всіх змінних, обчислити матрицю парних коефіцієнтів кореляції на комп'ютері не складно, застосовуючи, наприклад, табличний процесор MS Excel або програму Statistica.

Рішенням системи (7.14) визначаються коефіцієнти, які показують, скільки значень п.к.о. змінить у середньому результат, якщо відповідний фактор x_j зміниться на одну п.к.о. при постійному середньому рівні інших чинників. Оскільки всі змінні задані, як центровані та нормовані, β — коефіцієнти

можна порівняти між собою. Порівнюючи їх один з одним, можна ранжувати фактори за силою їхнього впливу на результат. У цьому основна перевага стандартизованих коефіцієнтів регресії, на відміну від коефіцієнтів звичайної регресії, які незрівнянні між собою.

Нехай функція витрат виробництва y (тис. грн) характеризується рівнянням виду: $y = 200 + 1,2x_1 + 1,1x_2 + \epsilon$, де факторами є основні виробничі фонди (тис. грн) та чисельність зайнятих у виробництві (осіб). Звідси видно, що за умови постійної зайнятості зростання вартості основних виробничих фондів на 1 тис. грн тягне за собою збільшення витрат у середньому на 1,2 тис. грн, що більше впливає на витрати виробництва відносно інших. Таке порівняння можливе, якщо звернутися до рівняння регресії у стандартизованому масштабі. Нехай воно виглядає так:

$$\hat{t}_y = 0,5t_{x_1} + 0,8t_{x_2}.$$

Це означає, що зі зростанням першого чинника однією С.К.В. при постійному числі зайнятих витрати на продукцію збільшуються в середньому на 0,5 С.К.В.

У парній залежності стандартизований коефіцієнт регресії не що інше, як лінійний коефіцієнт кореляції r . Подібно до того, як у парній залежності коефіцієнти регресії та кореляції пов'язані між собою, так і у множинній регресії коефіцієнти “чистої” регресії b_j пов'язані з β -коефіцієнтами:

$$b_j = \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}}. \quad (7.15)$$

Це дозволяє від рівняння регресії у стандартизованому масштабі

$$\hat{t}_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \dots + \beta_p t_{x_p} \quad (7.16)$$

переходити до рівняння регресії у натуральному масштабі (7.4). Параметр a визначається так:

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \dots - b_p \bar{x}_p. \quad (6.17)$$

Вільний член у рівнянні (7.16) відсутній, оскільки всі стандартизовані змінні мають середнє нульове значення.

Розглянутий зміст стандартизованих коефіцієнтів регресії дає можливість використовувати їх при відсіванні факторів — з моделі виключаються фактори з найменшим значенням j .

p align="justify"> Комп'ютерні програми побудови рівняння множинної регресії залежно від використаного в них алгоритму рішення дозволяють отримати або тільки рівняння регресії для вихідних даних, або, крім того, рівняння регресії в стандартизованому масштабі.

На закінчення наведемо розрахунок стандартизованого рівняння регресії за даними розглянутого вище числового прикладу. Використовуючи функцію Корел в Excel, розрахуємо розширену матрицю парних коефіцієнтів кореляції:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0,27149 & 0,873684 \\ -0,27149 & 1 & -0,68224 \end{bmatrix},$$

в якій останній стовпець складається з елементів $r_{yx_1}(r_{SY})$ $r_{SW}(r_{yx_2})$ відповідно, а непоодинокі елементи у перших двох стовпцях відповідають $r_{YW}(r_{x_1x_2})$. Ця матриця є розширеною матрицею системи рівнянь визначення β -коефіцієнтів.

Вирішуючи систему методом визначників, отримуємо:

$$\Delta = 0,926291;$$

$$\Delta_1 = 0,688461;$$

$$\Delta_2 = -0,44504;$$

$$\beta_1 = 0,688461/0,926291 = 0,743245;$$

$$\beta_2 = -0,44504/0,926291 = -0,48045;$$

Тоді стандартизоване рівняння регресії записуємо так:

$$\hat{t}_y = 0,743245t_y - 0,48045t_w.$$

Звідси видно, що перший фактор має більший вплив на результат, ніж другий ($|\beta_1| > |\beta_2|$), проте ця різниця не така велика, як для коефіцієнтів у натуральному масштабі (0,1229 і -0,0294). Від цього рівняння можна перейти до рівняння у натуральному масштабі. Для цього за допомогою функції СТАНДОТКЛОН в Excel визначимо стандартні відхилення всіх змінних:

$$\sigma_s = 1,75357; \quad \sigma_y = 10,6066; \quad \sigma_w = 28,6496,$$

а за допомогою функції СРЗНАЧ — середні значення:

$$\bar{S} = 3,8; \quad \bar{Y} = 40; \quad \bar{W} = 47,4.$$

Далі визначаємо оцінки параметрів:

$$b_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} = 0,743245 \cdot \frac{1,75357}{10,6066} = 0,1229;$$

$$b_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} = -0,48045 \cdot \frac{1,75357}{28,6496} = -0,0294;$$

$$a = \bar{S} - b_1\bar{Y} - b_2\bar{W} = 3,8 - 0,1229 \cdot 40 + 0,0294 \cdot 47,4 = 0,2787.$$

Ці значення оцінок збігаються з оцінками, отриманими раніше.

7.4. Частинні рівняння регресії

На основі рівнянь (7.3) і (7.4) можна знайти частинні рівняння регресії:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2, x_3, \dots, x_p} = f(x_1) \\ y_{x_2 \cdot x_1, x_3, \dots, x_p} = f(x_2) \\ \dots \\ y_{x_p \cdot x_1, x_2, \dots, x_{p-1}} = f(x_p) \end{cases},$$

які пов'язують результат з одним із факторів при закріпленні інших факторів на середньому рівні. Вони мають такий вигляд:

$$y_{x_j, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p} = a + b_1 \bar{x}_1 + \dots + b_{j-1} \bar{x}_{j-1} + b_j \bar{x}_j + b_{j+1} \bar{x}_{j+1} + \dots + b_p \bar{x}_p + e, \quad j = \overline{1, p}.$$

Це фактично парні рівняння регресії, які можна записати так:

$$\hat{y}_{x_j, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p} = A_j + b_j x_j, \quad j = \overline{1, p}.$$

Вільні члени цих виразів легко визначаються з наступної рівності:

$$A_j = a + b_1 \bar{x}_1 + \dots + b_{j-1} \bar{x}_{j-1} + b_j \bar{x}_j + b_{j+1} \bar{x}_{j+1} + \dots + b_p \bar{x}_p, \quad j = \overline{1, p}.$$

На відміну від парної регресії, частинні рівняння регресії характеризують ізольований вплив чинника результат, оскільки інші чинники закріплені на незмінному рівні. Ефекти впливу інших факторів приєднані до них до вільного члена рівняння множинної регресії. Це дає можливість з урахуванням приватних рівнянь регресії визначати приватні коефіцієнти еластичності:

$$E_j = b_j \frac{x_j}{\hat{y}_{x_j, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p}}. \quad (7.18)$$

Припустімо, що з низки регіонів регресійна залежність величини імпорту певного товару від вітчизняного виробництва становить x_1 , зміни запасів x_2 і споживання на внутрішньому ринку x_3 :

$$\hat{y} = -66,028 + 0,135x_1 + 0,476x_2 + 0,343x_3.$$

При цьому середні значення становили:

$$\bar{y} = 31,5; \quad \bar{x}_1 = 245,7; \quad \bar{x}_2 = 3,7; \quad \bar{x}_3 = 182,5.$$

На основі цієї інформації можуть бути знайдені середні за сукупністю показники еластичності:

$$\bar{E}_j = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}. \quad (7.19)$$

Для цього вони виявляться рівними:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= 0,135 \cdot \frac{245,7}{31,5} = 1,053 \% ; & \bar{E}_2 &= 0,476 \cdot \frac{3,7}{31,5} = 0,056 \% ; \\ \bar{E}_3 &= 0,343 \cdot \frac{182,5}{31,5} = 1,987 \%. \end{aligned}$$

Звідси видно, що зі зростанням величини вітчизняного виробництва на 1 % обсяг імпорту загалом за сукупністю регіонів зросте на 1,053 % при постійних запасах і споживанні. За аналогією інтерпретуються й інші показники еластичності.

Середні показники еластичності можна порівнювати один з одним і відповідно ранжувати фактори за силою їхнього впливу на результат. Цей приклад доводить, що найбільше впливає на величину імпорту розмір внутрішнього споживання товару x_3 , а найменше — зміна запасів x_2 .

У кожному окремому регіоні має місце своє поєднання значень факторів. Тому на основі виразу (7.18) для кожного регіону можуть бути визначені окремі коефіцієнти еластичності. Перед цим наведемо рівняння регресії за кожним фактором:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3} &= a + b_1 x_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3, \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3} &= a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 x_2 + b_3 \bar{x}_3, \\ \hat{y}_{x_3 \cdot x_2, x_3} &= a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 x_3,\end{aligned}$$

або конкретно для заданих значень:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3} &= -66,028 + 0,135 \cdot x_1 + 0,476 \cdot 3,7 + 0,343 \cdot 182,5, \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3} &= -66,028 + 0,135 \cdot 245,7 + 0,476 \cdot x_2 + 0,343 \cdot 182,5, \\ \hat{y}_{x_3 \cdot x_2, x_3} &= -66,028 + 0,135 \cdot 245,7 + 0,476 \cdot 3,7 + 0,343 \cdot x_3.\end{aligned}$$

Нехай, наприклад, для одного з регіонів $x_1 = 160,2$; $x_2 = 4,0$; $x_3 = 190,5$. Тоді частинні коефіцієнти еластичності по цьому регіону складатимуть:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= b_1 \cdot \frac{x_1}{\hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3}} = 0,135 \cdot \frac{160,2}{-1,669 + 0,135 \cdot 160,2} = 1,084 \% ; \\ \bar{E}_2 &= b_2 \cdot \frac{x_2}{\hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3}} = 0,476 \cdot \frac{4,0}{29,739 + 0,476 \cdot 4,0} = 0,06 \% ; \\ \bar{E}_3 &= b_3 \cdot \frac{x_3}{\hat{y}_{x_3 \cdot x_1, x_2}} = 0,343 \cdot \frac{190,5}{-31,097 + 0,343 \cdot 190,5} = 1,908 \% .\end{aligned}$$

Отже, частинні коефіцієнти еластичності для регіону дещо відрізняються від аналогічних середніх показників за сукупністю регіонів. Вони можуть бути використані для прийняття рішень відносно розвитку конкретних регіонів.

Аналіз якості емпіричного рівняння множинної лінійної регресії

Перевірка статистичної якості оціненого рівняння регресії проводиться, з одного боку, за статистичною значущістю параметрів рівняння, а з другого — за загальною якістю рівняння регресії. Крім цього, перевіряється здійсненість передумов МНК.

Спочатку розглянемо перші два види перевірок та пов'язані з ними питання. Деякі передумови МНК та перевірки їх здійсненості будемо розглядати окремо.

Як і у випадку парної регресії, статистична значущість параметрів множинної лінійної регресії з p -факторами перевіряється на основі t -статистики:

$$t_{b_j} = \frac{b_j}{m_{b_j}} \left(\text{або } t_a = \frac{a}{m_a} \right), \quad (7.20)$$

де величина m_{b_j} (m_a) називається стандартною помилкою параметра b_j (a). Для її визначення використаємо матрицю

$$Z^{-1} = (X'X)^{-1},$$

в якій позначимо j -й діагональний елемент як z'_{jj} . Тоді вибіркова дисперсія емпіричного параметра регресії дорівнює:

$$m_{b_j}^2 = s^2 z'_{jj}, \quad j = \overline{1, p}, \quad (7.21)$$

а для вільного члена вираз має вигляд:

$$m_a^2 = s^2 z'_{00}. \quad (7.21')$$

Якщо рахувати, що в матриці Z^{-1} індекси змінюються від 0 до p . Тут s^2 — незміщена оцінка дисперсії випадкової помилки ϵ :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - p - 1}. \quad (7.22)$$

Стандартні помилки параметрів регресії дорівнюють:

$$m_{b_j} = \sqrt{m_{b_j}^2} \left(\text{або} \quad m_a = \sqrt{m_a^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}. \quad (7.23)$$

Отримана за виразом (7.20) t -статистика для відповідного параметра має розподіл Стюдента з числом ступенів свободи $(n - p - 1)$. При необхідному рівні значущості α ця статистика порівнюється з критичною точкою розподілу Стюдента $t(\alpha; n - p - 1)$ (двосторонньою).

Якщо $|t| > t(\alpha; n - p - 1)$, то відповідний параметр вважається статистично значущим, а нуль-гіпотеза у вигляді $H_0: b_j = 0$ або $H_0: a = 0$ відкидається.

У протилежному випадку ($|t| < t(\alpha; n - p - 1)$) параметр вважається статистично значущим, і нуль-гіпотеза не може бути відкинута. Оскільки b_j не відрізняється значно від нуля, фактор x_j лінійно не пов'язаний з результатом. Його наявність серед пояснюючих змінних є не виправданим зі статистичної точки зору. Не надаючи якогось серйозного впливу на залежну змінну, він лише спотворює реальну картину взаємозв'язку. Тому після встановлення того факту, що коефіцієнт b_j статистично незначущий, змінну x_j рекомендується виключити з рівняння регресії. Це не призведе до суттєвої втрати якості моделі, але зробить її більш конкретнішою.

Сувору перевірку значущості параметрів можна замінити простим порівняльним аналізом.

Якщо $|t| \leq 1$, тобто $b_j < m_{b_j}$, то коефіцієнт статистично незначущий.

Якщо $1 < |t| \leq 2$, тобто $b_j < 2m_{b_j}$, то коефіцієнт є відносно значущим. У даному випадку рекомендується скористатися таблицею критичних точок розподілу Стюдента.

Якщо $2 < |t| \leq 3$, то коефіцієнт є значущим. Це твердження є гарантованим при $(n - p - 1) > 20$ та $\alpha \geq 0,05$.

Якщо $|t| > 3$, то коефіцієнт вважається сильно значущим. Імовірність помилки в даному випадку при достатньому числі спостережень не перевищує 0,001.

Проаналізувати значущість коефіцієнта b_j можна й іншим чином. Для цього будується інтервальна оцінка відповідного коефіцієнта. Якщо задати

рівень значущості α , то довірчий інтервал, у який з ймовірністю $(1 - \alpha)$ падає невідоме значення параметра $\beta'_j(\alpha')$, визначається нерівністю:

$$b_j - t(\alpha; n - p - 1) \cdot m_{b_j} < \beta'_j < b_j + t(\alpha; n - p - 1) \cdot m_{b_j} \quad (7.24)$$

або

$$a - t(\alpha; n - p - 1) \cdot m_a < \alpha' < a + t(\alpha; n - p - 1) \cdot m_a. \quad (7.24')$$

Якщо довірчий інтервал не містить нульового значення, то відповідний параметр є статистично значущим, у протилежному випадку гіпотезу про нульове значення параметра відкидати не можна.

Для перевірки загальної якості рівняння регресії використовується **коефіцієнт детермінації** R^2 , як у загальному випадку розраховується за формулою:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (7.25)$$

Він показує, як і в парній регресії, частку загальної дисперсії, пояснену рівнянням регресії. Його значення перебувають між нулем та одиницею. Чим ближче цей коефіцієнт до одиниці, тим більше рівняння регресії пояснює поведінку y .

Для множинної регресії R^2 є незниженою функцією числа пояснюючих змінних. Додавання нової пояснюючої змінної ніколи не зменшує значення R^2 . Справді, кожна наступна пояснювальна змінна може лише доповнити, але ніяк не скоротити інформацію, яка пояснює поведінку залежної змінної.

У формулі (7.25) використовується остаточна дисперсія, яка має систематичну помилку в бік зменшення, тим паче значну, чим більше параметрів визначається в рівнянні регресії при заданому об'ємі спостережень n . Якщо число параметрів $(p + 1)$ наближається до n , то остаточна дисперсія буде близька до нуля і коефіцієнт детермінації приблизиться до одиниці навіть у разі слабого зв'язку факторів з результатом.

Тому в чисельнику і знаменнику дробу (7.25) робиться поправка на число ступенів свободи залишкової та загальної дисперсії відповідно:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2 : (n - p - 1)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 : (n - 1)}. \quad (7.26)$$

Оскільки величина (7.25) зазвичай збільшується при додаванні пояснюючої змінної до рівняння регресії навіть без достатніх на те підстав, скоригований коефіцієнт (7.26) компенсує це збільшення шляхом накладення “штрафу” за збільшення кількості незалежних змінних. Перепишемо (7.26):

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - p - 1} = \frac{n - 1}{n - p - 1} R^2 - \frac{p}{n - p - 1} = R^2 - \frac{p}{n - p - 1} (1 - R^2). \quad (7.27)$$

По мірі зростання p збільшується відношення $p/(n - p - 1)$ і, отже, зростає розмір коригування коефіцієнта R^2 у бік зменшення.

Із (7.27) очевидно, що $\bar{R}^2 < R^2$ при $p > 1$. Зі зростанням p $\bar{R}^2$ росте повільніше, ніж R^2 . Інакше кажучи, він коригується у бік зменшення зі зростанням числа пояснюючих змінних. При цьому $\bar{R}^2 = R^2$ тільки при $R^2 = 1$. А ось $\bar{R}^2$ може навіть приймати від'ємні значення (наприклад, при $R^2 = 0$). Тому для коригування (7.26) немає строгого математичного обґрунтування.

Доведено, що $\bar{R}^2$ збільшується при додаванні нової пояснюючої змінної тоді і тільки тоді, коли t -статистика для цієї змінної за модулем більше ніж одиниця. З цього аж ніяк не слідує, як можна було б припустити, що збільшення $\bar{R}^2$ означає покращення специфікації рівняння. Проте додавання в модель нових факторів здійснюється доти, доки зростає скоригований коефіцієнт детермінації.

Зазвичай наводяться дані як по R^2 , так і по $\bar{R}^2$, які є сумарними заходами загальної якості рівняння регресії. Проте не слід абсолютизувати значущість коефіцієнтів детермінації. Існує чимало прикладів неправильно побудованих моделей, які мають високі коефіцієнти детермінації. Тому нині коефіцієнт детермінації розглядається лише як один із низки показників, які треба проаналізувати, щоб уточнити модель, яка будується.

Аналіз статистичної значущості коефіцієнта детермінації проводиться на основі перевірки нуль-гіпотези $H_0: R^2 = 0$ проти альтернативної гіпотези $H_1: R^2 > 0$. Для перевірки цієї гіпотези використовується наступна F -статистика:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - p - 1}{p}. \quad (7.28)$$

Величина F при виконанні передумов МНК і при справедливості нуль-гіпотези має розподіл Фішера. За (7.28) показники F і R^2 рівні або не рівні нулю одночасно. Якщо $F = 0$, то $R^2 = 0$, і лінія регресії $y = \bar{y}$ є найкращою по МНК. Отже, величина y лінійно не залежить від $x_1, x_2, \dots, x_p$. Для перевірки нуль-гіпотези при заданому рівні значущості α за таблицями критичних точок розподілу Фішера знаходиться критичне значення $F_{\text{табл}}(\alpha; p; n - p - 1)$. Якщо $F > F_{\text{табл}}$, нуль-гіпотеза відхиляється, що рівнозначно статистичній значущості R^2 , тобто $R^2 > 1$.

Еквівалентний аналіз може бути запропонований розглядом іншої нуль-гіпотези, котра формулюється як $H_0: \beta'_1 = \beta'_2 = \dots = \beta'_p$. Цю гіпотезу можна назвати гіпотезою про загальну значущість рівняння регресії. Якщо дана гіпотеза не відхиляється, то можна зробити висновок, що сукупний вплив усіх p пояснюючих змінних $x_1, x_2, \dots, x_p$ на залежну змінну y можна вважати статистично несуттєвим, а загальну якість рівняння регресії невисокою.

Перевірка такої гіпотези здійснюється на основі дисперсійного аналізу порівняння поясненої та залишкової дисперсії, тобто нуль-гіпотеза формулюється як $H_0: D_{\text{факт}} = D_{\text{ост}}$ проти альтернативної гіпотези $H_1: D_{\text{факт}} > D_{\text{ост}}$. При цьому будується F -статистика:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{p} : \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n - p - 1)}. \quad (7.29)$$

У чисельнику подано пояснену (факторну) дисперсію з розрахунку на один ступінь свободи (кількість ступенів свободи рівна кількості факторів, тобто p). У знаменнику — остаточно дисперсія на одну ступінь свободи. Її кількість ступенів свободи рівна $(n - p - 1)$. Втрата $(p + 1)$ ступеня свободи пов'язана з необхідністю вирішення системи $(p + 1)$ лінійних рівнянь при визначенні параметрів емпіричного рівняння регресії. Якщо врахувати, що число ступенів свободи загальної дисперсії рівне $(n - 1)$, то число ступенів свободи поясненої дисперсії рівне різниці $(n - 1) - (n - p - 1)$, тобто p . Слід зауважити, що вираз (7.29) еквівалентний (7.28). Це стає ясно, якщо чисельник та знаменник (7.29) розділити на загальну С.К.В.:

$$F = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 : \sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 : \sum (y_i - \bar{y})^2} \cdot \frac{n - p - 1}{p} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - p - 1}{p}.$$

Тому методика прийняття чи відхилення нуль-гіпотези для статистики (7.29) нічим не відрізняється від такої для статистики (7.28).

Аналіз статистики F дає можливість зробити висновок про те, що для прийняття гіпотези про одночасну рівність нулю всіх коефіцієнтів лінійної регресії коефіцієнт детермінації R^2 повинен суттєво відрізнятися від нуля. Його критичне значення зменшується при зростанні числа спостережень і може стати будь-яким меншим.

Наприклад, нехай при оцінці регресії з двома пояснюючими змінними по 30 спостереженням $R^2 = 0,65$. Тоді

$$F = \frac{0,65}{0,35} \cdot \frac{30 - 2 - 1}{2} \approx 25,07.$$

За таблицями критичних точок розподілу Фішера знайдемо $F(0,05; 2; 27) = 3,36$; $F(0,01; 2; 27) = 5,49$. Оскільки $F_{\text{набл}} = 25,05 > F_{\text{кр}}$ як при 5 %-му, так і при 1 %-му рівні значущості, то нульова гіпотеза в обох випадках відхиляється. Якщо в такій самій ситуації $R^2 = 0,4$, то

$$F = \frac{0,4}{0,35} \cdot \frac{30 - 2 - 1}{2} \approx 15,43.$$

Припущення про незначущість зв'язку відкидається.

Іншим важливим напрямом використання статистики Фішера є перевірка гіпотези про рівність нулю не всіх коефіцієнтів регресії одночасно, а тільки деякої частини цих коефіцієнтів. Це дозволяє оцінити обґрунтованість виключення чи додавання до рівняння регресії деяких наборів факторів, що особливо важливо при вдосконаленні лінійної регресійної моделі.

Нехай спочатку побудоване за n спостереженням рівняння регресії виглядає як (7.4), а коефіцієнт детермінації для цієї моделі рівний R_1^2 . Виключимо

з розгляду k пояснюючих змінних. Не порушуючи спільності, припустімо, що це будуть k останніх змінних. За початковими n спостереженнями для факторів, що залишилися, побудуємо інше рівняння регресії:

$$\hat{y} = c + d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_{p-k} x_{p-k}, \quad (7.30)$$

для якого коефіцієнт детермінації рівний R_2^2 . Очевидно, $R_2^2 \leq R_1^2$, оскільки кожна додаткова змінна пояснює частину розсіювання залежної змінної. Перевіряючи гіпотезу $H_0: R_1^2 - R_2^2 = 0$, можна визначити, чи суттєво погіршилася якість опису поведінки залежної змінної. Для цього використовують статистику:

$$F = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \cdot \frac{n - p - 1}{k}. \quad (7.31)$$

У разі справедливості H_0 приведена статистика має розподіл Фішера з числом ступенів свободи p і $(n - p - 1)$. Тут $R_2^2 \leq R_1^2$ — втрата якості рівняння внаслідок відкидання k факторів; k — число ступенів свободи, що додатково з'явилися; $(1 - R_1^2)/(n - p - 1)$ — непояснена дисперсія початкового рівняння.

Якщо величина (7.31) перевершує критичну $F_{\text{кр}} = F(\alpha; k; n - p - 1)$ на необхідному рівні значущості α , то нуль-гіпотеза має бути відкинута. У цьому випадку одночасне вилучення із розгляду k пояснюючих змінних некоректно, оскільки R_1^2 суттєво перевищує R_2^2 . Це означає, що загальна якість початкового рівняння регресії істотно краща за якість рівняння регресії з відкинутими змінними, так як початкове рівняння пояснює набагато більшу частку розкиду залежної змінної. Якщо ж, навпаки, $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, це означає, що різниця $R_1^2 - R_2^2$ незначна, і можна зробити висновок про доцільність одночасного відкидання k факторів, оскільки це не призвело до суттєвого погіршення загальної якості рівняння регресії. Тоді нуль-гіпотеза не може бути відкинута.

Аналогічні міркування можна використовувати і для перевірки обґрунтованості **включення** нових k факторів. У цьому випадку розглядається наступна статистика:

$$F = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_2^2} \cdot \frac{n - p - 1}{k}. \quad (7.32)$$

Якщо вона перевищує критичне значення $F_{\text{кр}}$, то включення нових факторів пояснює істотну частину дисперсії залежної змінної, що не пояснена раніше. Тому таке добавляння оправдано. Добавляти змінні, як правило, доцільно по одній. Крім цього, при додаванні факторів логічно використовувати скоригований коефіцієнт детермінації, так як звичайний R^2 завжди росте при додаванні нової змінної, а у скоригованому $\bar{R}^2$ одночасно росте величина p , яка зменшує його. Якщо збільшення частки поясненої дисперсії при додаванні нової змінної незначне, то $\bar{R}^2$ може зменшитися. В цьому випадку додавання вказаного фактору недоцільно.

Крім коефіцієнта детермінації R^2 , у рівнянні множинної регресії використовується інший показник, тісно пов'язаний з R^2 . Це так званий показник множинної кореляції, рівний кореню квадратному з R^2 :

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (7.33)$$

Межі його зміни такі самі, що і в парній регресії: від 0 до 1. Чим ближче його значення до одиниці, тим тісніше зв'язок результативної ознаки з усім набором досліджуваних факторів.

Для лінійного рівняння множинної регресії формула індексу кореляції може бути представлена виразом:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}}, \quad (7.34)$$

де β_j — стандартизовані коефіцієнти регресії; r_{yx_i} — парні коефіцієнти кореляції результату з кожним із факторів.

Формула індексу множинної кореляції для лінійної регресії отримала назву **лінійного коефіцієнта множинної кореляції**, або **сукупного коефіцієнта кореляції**.

При лінійній залежності визначення сукупного коефіцієнта кореляції можливо без побудови регресії і оцінки її параметрів, а з використанням тільки матриці парних коефіцієнтів кореляції:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}, \quad (7.35)$$

де Δr — визначник матриці парних коефіцієнтів кореляції:

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_p} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_py} & r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (7.36)$$

а Δr_{11} — визначник матриці міжфакторної кореляції:

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.37)$$

Визначник (7.37) залишається після викреслення з матриці коефіцієнтів парної кореляції першого стовпця та першого рядка, що і відповідає матриці коефіцієнтів парної кореляції між факторами.

Виведення основних рівнянь

У якості рівнянь регресії обрано поліном степені m :

$$Y = A + BX + CX^2 + \dots + KX^m.$$

При $m = 1$: $Y = A + BX$.

Визначимо параметри рівняння регресії за методом найменших квадратів. Для цього необхідно:

- скласти систему рівнянь за числом розрахункових параметрів:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial \Delta}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial \Delta}{\partial C} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial \Delta}{\partial K} = 0,$$

де $\Delta = \sum_1^n (Y_i - A - BX - CX^2 - \dots - KX^m)^2$.

Наприклад, для лінійного рівняння регресії система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} B \sum_1^n X_i^2 + A \sum_1^n X_i = \sum_1^n X_i Y_i \\ B \sum_1^n X_i + na = \sum_1^n Y_i \end{cases};$$

- вирішити систему рівнянь та визначити невідомі. Наприклад, для лінійного рівняння регресії рішення має вигляд:

$$B = \frac{n \sum_1^n X_i Y_i - \sum_1^n X_i \sum_1^n Y_i}{n \sum_1^n X_i^2 - \left(\sum_1^n X_i \right)^2}; \quad A = \frac{\sum_1^n X_i^2 \sum_1^n Y_i - \sum_1^n X_i \sum_1^n X_i Y_i}{n \sum_1^n X_i^2 - \left(\sum_1^n X_i \right)^2}.$$

Перевіримо правильність вибору виду рівнянь регресії. Для цього необхідно:

- розрахувати відхилення експериментальних значень Y_i від відповідних значень Y_{pi} , розрахованих для того ж аргументу X_i за отриманим рівнянням регресії $\Delta Y_i = Y_i - Y_{pi}$;
- побудувати в осях координат $X, \Delta Y$ отримані значення ΔY_i для відповідних X_i ;
- записати послідовність значень ΔY_j у міру зростання $X_j, X_j \in (l, n)$.

Можна збільшити степінь полінома m на одиницю та повторити обчислення за п. 2–3. Наприклад, для полінома другої степені: $Y = A + BX + CX^2$.

З метою визначення параметрів рівнянь регресії у даному випадку необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} C \sum_1^n X_i^4 + B \sum_1^n X_i^3 + A \sum_1^n X_i^2 = \sum_1^n X_i^2 Y_i \\ C \sum_1^n X_i^3 + B \sum_1^n X_i^2 + A \sum_1^n X_i = \sum_1^n X_i Y_i \\ C \sum_1^n X_i^2 + B \sum_1^n X_i + na = \sum_1^n Y_i \end{cases}$$

Парна лінійна регресійна модель

Розглянемо парну лінійну регресивну модель взаємозв'язку двох змінних, для якої функція регресії $\varphi(x)$ лінійна. Позначимо через y_x умовну середню

ознаку Y в генеральній сукупності при фіксованому значенні змінної X . Тоді рівняння регресії буде мати вигляд:

$$y_x = ax + b,$$

де a — коефіцієнт регресії (показник нахилу лінії лінійної регресії).

Коефіцієнт регресії показує, на скільки одиниць у середньому змінюється змінна Y при змінненні змінної X на одну одиницю. За допомогою методу найменших квадратів отримують формули, за якими можна обчислювати параметри лінійної регресії (табл. 1):

Таблиця 1

Формули для розрахунку параметрів лінійної регресії

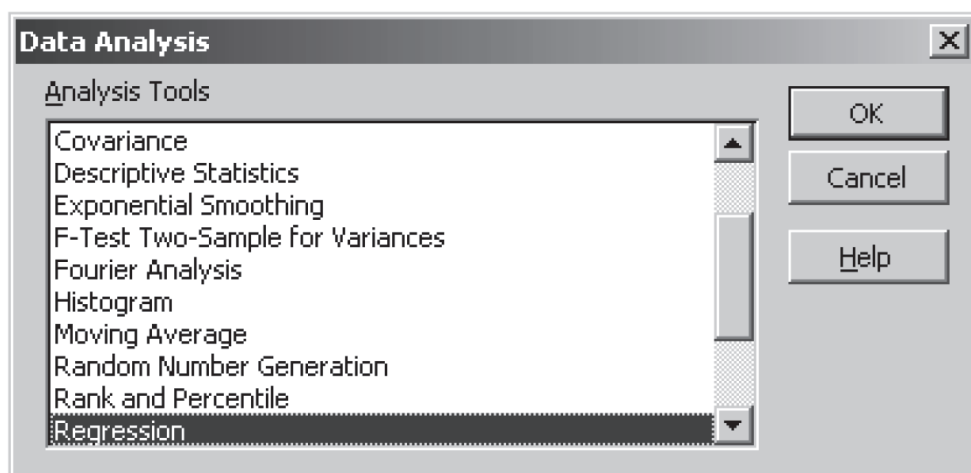
Вільний член b	Коефіцієнт регресії a	Коефіцієнт детермінації
$b = \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$	$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$	$R^2 = \frac{\sum (y_i^p - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$

Напрямок зв'язку між змінними визначається на основі знаку коефіцієнта регресії. Якщо знак при коефіцієнті регресії позитивний, зв'язок залежної змінної з незалежною буде позитивним. Якщо знак при коефіцієнті регресії негативний, зв'язок залежної змінної з незалежним виявляється негативним (зворотнім).

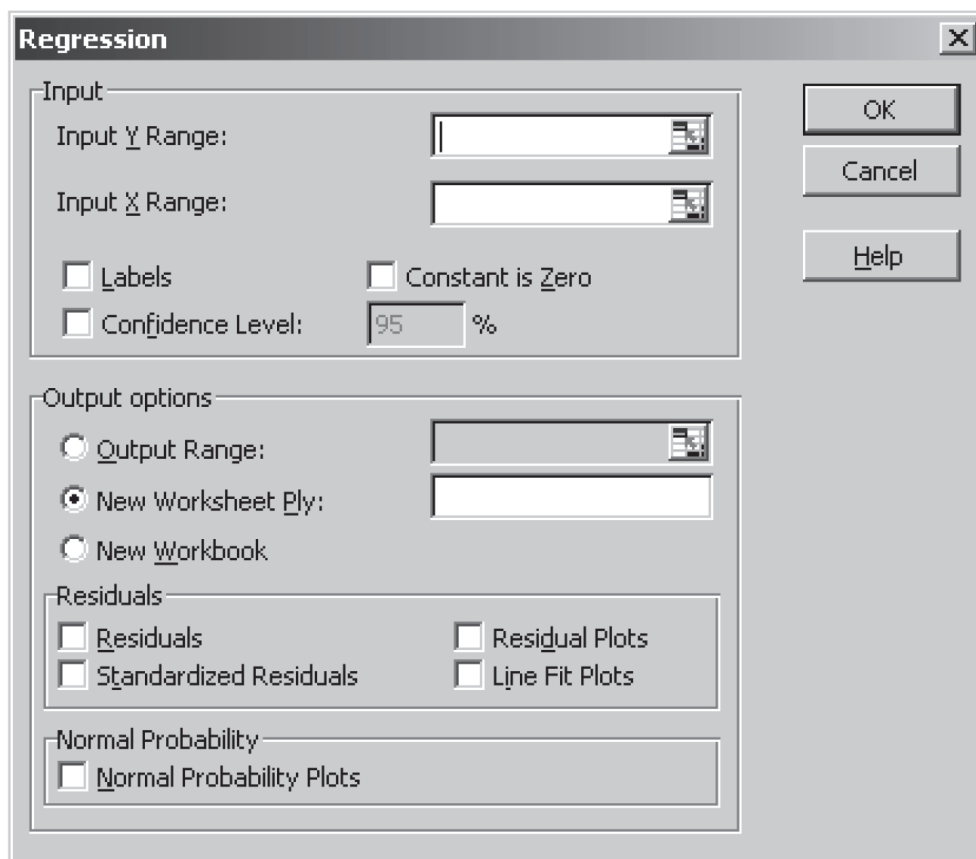
7.5. Практичне застосування. Оцінка регресії в пакеті Excel

7.5.1. Оцінка парної регресії в пакеті Excel

Щоб оцінити параметри парної регресії $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ в пакеті Excel, відкрийте файл, який містить необхідні дані, виберіть послідовно пункти меню Tools (Сервіс), Data analysis (Пакет аналізу), Regression (Регресія),



З'явиться вікно



а потім вкажіть у вікнах, що з'явилися Input Y Range — залежну, а в Input X Range — не залежну змінні, виділивши відповідні стовпці.

Можете відмітити пункти Residuals і Residual Plots для зберігання значень залишків регресії і побудови їх графіку.

7.5.2. Оцінка множинної регресії в пакеті Excell

Рекомендації для оцінки параметрів множинної регресії $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \epsilon$ аналогічні до наведених для парної регресії. Стовпці залежних змінних повинні знаходитися поряд. За необхідності їх переміщують, використовуючи пункти меню Insert, Edit/Copy, Edit/Paste.

7.5.3. Результати оцінки

Рекомендується розміщувати результати оцінки регресії на окремому аркуші. Вони будуть мати наступний вигляд:

SUMMARY
OUTPUT

<i>Regression Statistics</i>	
Multiple R	0,804519985
R Square	0,647252406
Adjusted R Square	0,634654277
Standard Error	0,868384063
Observations	59

ANOVA

	<i>Df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Significance F</i>
Regression	2	77.48565853	38.74283	51.37687	2.133E-13
Residual	56	42.22908931	0.754091		
Total	58	119.7147478			

	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>	<i>Lower 95 %</i>	<i>Upper 95 %</i>
Intercept	-2.335689064	0.966701367	-2.41614	0.018971	-4.27222332	-0.399154808
X Variable 1	-0.187057396	0.123466717	-1.51504	0.135386	-0.43439079	0.060275994
X Variable 2	0.810273602	0.125944708	6.433566	2.97E-08	0.5579762	1.062571002

У нижній частині таблиці — результати оцінки регресії: оцінки МНК коефіцієнтів регресії, оцінки стандартних відхилень коефіцієнтів регресії, *t*-статистики для перевірки значущості коефіцієнтів регресії, *p*-value для цих тестів, нижні та верхні межі 95 % довірчих інтервалів для оцінок коефіцієнтів регресії.

Про якість підгонки оцінки побудованої регресії можна говорити за показниками

R Square	0,647252406
Adjusted R Square	0,634654277

а про адекватність регресії — за значенням *F*-статистики і її *p*-value.

<i>F</i>	<i>Significance F</i>
51.37687	2.133E-13

7.5.4. Створення нових змінних в пакеті Excel

Нова змінна в Excel створюється за допомогою формули, яка починається зі знаку рівності і призначеної для обробки даних з наступним переміщенням результатів обробки в комірку, де записана сама формула.

7.5.5. Оцінка регресії в пакеті Excel

Для побудови базових моделей регресійного аналізу підходить Microsoft Excel. Однак у пакеті Excel не закладено більшість тестів або цікавих моделей, однак за потреби користувач може сам прописати необхідні процедури, наприклад, використовуючи VBA.

Плюси цього пакета:

1. Поширеність. Нині на переважній більшості комп'ютерів стоїть це програмне забезпечення.

2. Крос-платформеність. Існують версії Excel як для ОС Windows, так і аналоги для Mac і Unix/Linux (для останніх операційних систем ця програма називається Open Office).

3. Інтуїтивність та простота. Не потрібно володіти особливими знаннями в програмуванні, щоб вміти працювати з цим пакетом.

4. Стабільність роботи і мала кількість помилок в коді (особливо порівняно з вільно поширюваним програмним забезпеченням).

5. Можливість програмування і створення користувацьких функцій.

Недоліки:

1. Платне розповсюдження. Щоб користуватися цим пакетом, необхідно купити ліцензію.

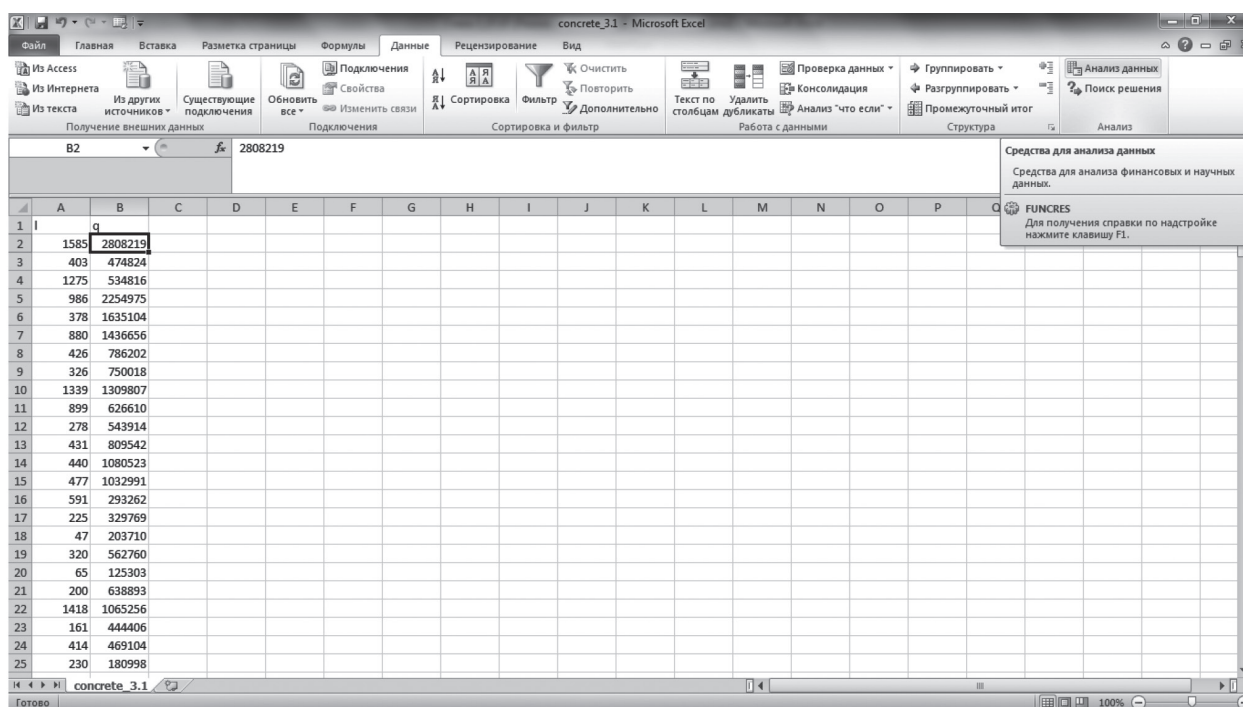
2. Мала кількість вбудованих статистичних функцій. Пакет Excel має більшу кількість вбудованих функцій, але оскільки статистичний аналіз не є спеціалізацією даного пакета, то кількість вбудованих статистичних моделей не велика.

Автори користуються Microsoft Excel 2010. У цьому розділі розглядатиметься лише пакет Аналіз Даних.

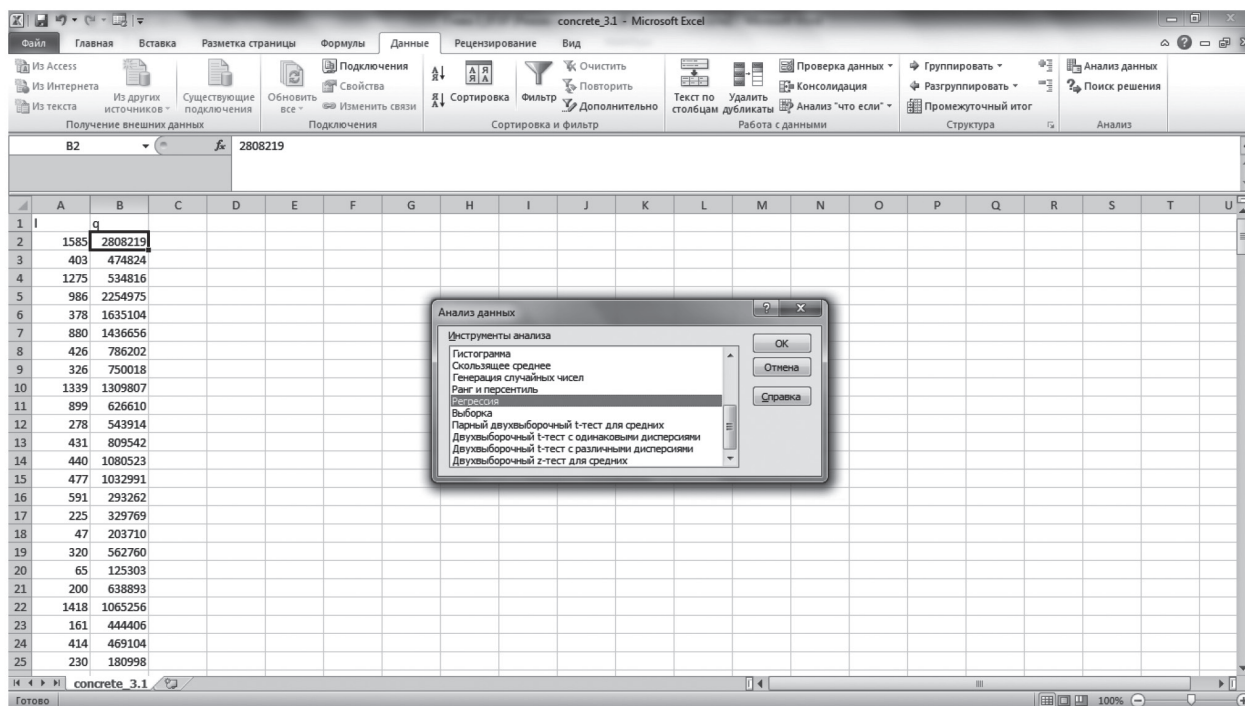
Щоб працювати з цим пакетом, спочатку його треба підключити. Для цього натисніть Файл ->Параметри. Далі зліва виберіть в меню Надбудови.

Потім у нижньому рядку під назвою Управління, виберіть Надбудови Excel і натисніть кнопку Перейти.

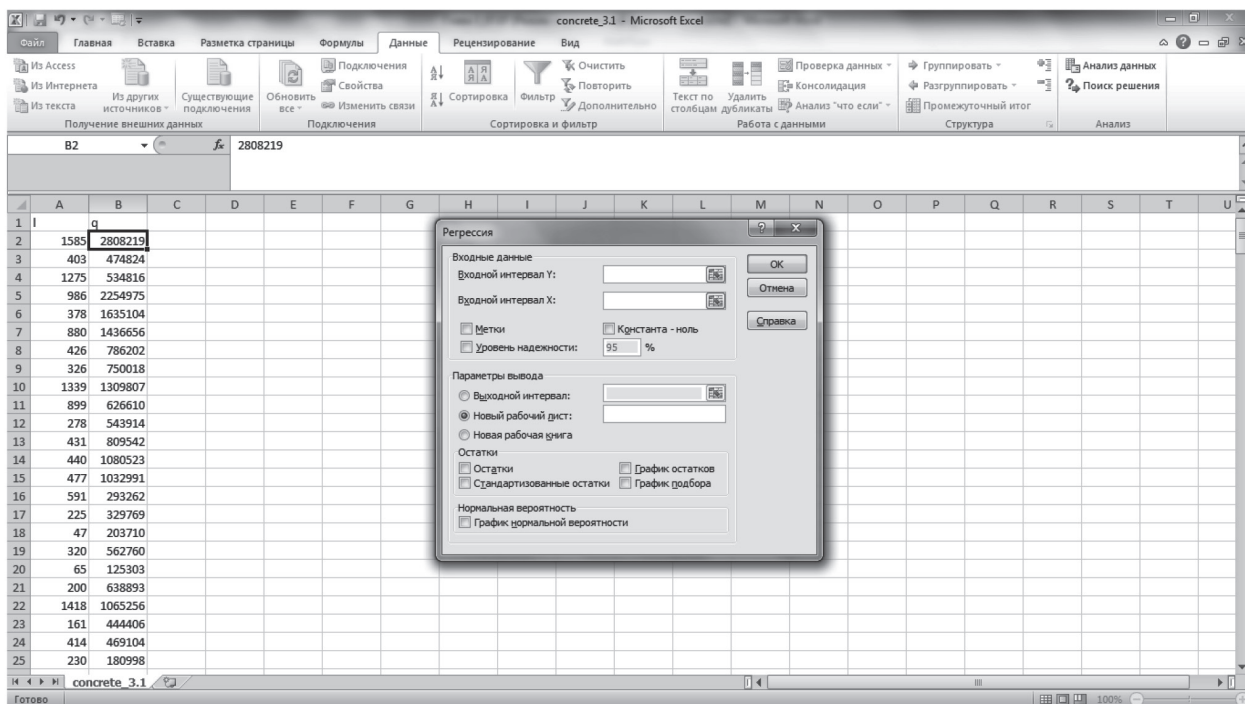
Щоб збудувати регресійну модель у пакеті Excel, потрібно у вкладці Дані вибрати опцію “Аналіз даних”.



Далі, натиснувши на “Аналіз даних”, виберіть опцію “Регресія”.



Після того, як Ви натиснете на ОК, у Вас на екрані з'явиться нове вікно з опціями регресійного аналізу.



У графі “Вхідний інтервал” Y необхідно вибрати стовпець, який буде відповідати за значення регресанта (це може бути лише один стовпець). У графі “Вхідний інтервал X” потрібно вибрати стовпці, які містять значення регресорів. Опція “Мітки”, якщо активна, дозволяє враховувати перший рядок, як назва змінних значущості. В розділі “Параметри виводу” можна встановлювати, куди виводяться результати регресії (в даному випадку виведемо результати на цей же аркуш, оскільки найчастіше зручно тримати дані та результати оцінки моделі на одному аркуші).

Розділ 8

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ДАНИХ І ПРОГНОЗУВАННЯ ЗАСОБАМИ МАШИННОЇ ГРАФІКИ

За народною мудрістю “краще один раз побачити ...” майже завжди дослідники намагалися візуалізувати, зробити наочними, процеси, що вивчалися, і “голі” експериментальні дані, що їх представляють. Так виникали геометрія, картографія чи астрономія, багато експериментаторів у різних науках намагалися на основі отриманих з експериментів і побудованих на площині точках зрозуміти, на що схожа та лінія, що їх з’єднує. Якщо таку лінію вдавалося описати формулою, це був успіх, що відкривав шлях до математичного моделювання відповідного процесу й побудови прогнозу відповідними розрахунками.

З такою ж задачею стикаються і в економіці та економетрії, коли бажано своїми очима роздивитися отримані вибірки даних та зрозуміти моделі, що за ними сховані. Саме тому економісти малюють різноманітні “хвилі”, щоб, скажімо, пояснити сезонні коливання на попит, чи лінію фронту, що розділяє сферу успішного інвестування від неуспішного у портфельному аналізі (рис. 29):

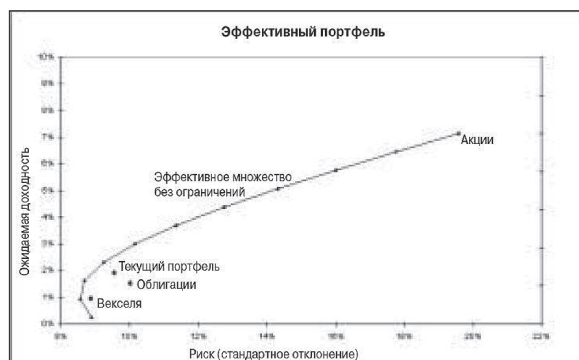


Рис. 29

Ця вічна проблема “краще побачити, ніж ...” з появою комп’ютерів стимулювала розробку й потужний розвиток характерної інформаційної технології — машинної (комп’ютерної) графіки. Правда, починалася вона досить скромно — з обчислення на ЕОМ координат точок, що друкувалися на багатометрових рулонах паперу. Пізніше графічні об’єкти зображували звичайними символами алфавітів (це розділ комп’ютерного живопису ASCII-art, що існує й досі) (див. рис. 30).

Лише винаходи “показуючих” пристроїв — дисплеїв (моніторів) спочатку символічних, згодом — растрових (точкових), чорно-білих, кольорових, з різною розділовою здатністю і форматами, з різними типами і розмірами екранів, у тому числі, в мобільних телефонах та “вказуючих” засобів пози-

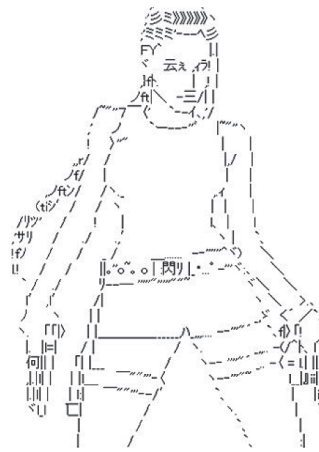
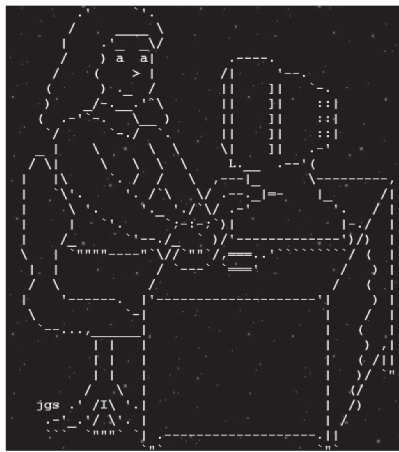


Рис. 30

ціювання (світлове перо, миша) – зробили можливими сучасні досягнення у різноманітних технологіях візуалізації: цифрова фотографія та телебачення, комп'ютерна томографія в медицині, тренажери-симулятори та ігрові системи.

Машинна графіка як розділ прикладної інформатики складається з таких класів задач (і відповідних графічних програм, що підтримують їх реалізацію):

- ілюстративна графіка та видавнича справа (художня графіка, рекламна продукція, технічна документація, web-дизайн, газети та журнали, комп'ютерні ігри, відео- та мультфільми). Використовуються графічні редактори типу MS Paint, Adobe PhotoShop, Corel DRAW, Adobe PageMaker тощо;
- ділова та наукова графіка (обчислення, автоматичне масштабування та побудова діаграм і графіків математичних функцій). Використовуються вбудовані в пакет MS Office програми Мастер діаграм, MS Equation, MS Visio, MathCAD;
- проєктно-конструкторська графіка (креслярська документація і розрахунки для машинобудування, мікроелектроніки, будівництва, картографії тощо). Використовуються пакети САПР типу AutoCAD, ArchiCAD;
- схемна (організаційна) графіка, презентаційна графіка (MS PowerPoint).

8.1. Ділова графіка

У бізнесовій практиці широко застосовуються засоби ділової графіки, її предметом є побудова масштабованих діаграм (chart) за числовими даними. Для середовища електронних таблиць Excel побудова діаграм — одна з трьох його базових властивостей: 1) табличні обчислення за принципом “що-якщо” (див. рис. 31); 2) табличні БД (див. рис. 32, а); 3) діаграми (див. рис. 32, б).

Коли в електронних чи паперових таблицях багато чисел із різними значеннями, їх можна не побачити усі на екрані (бо видно не більш як 40 рядків висотою 10 пт.), відповідно, дуже важко оцінити усю вибірку, порівнюючи числа між собою з тим, щоб зробити певний якісний висновок. Тому вже

Microsoft Excel - ділова

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервіс Дані

Arial Cyr 10 Ж К Ч

K9 fx

	A	B	C	D	E
1		2005 рік	2006 рік	2007 рік	
2	Зарплата	123	145	122	
3	Послуги	23	56	78	
4	Матеріали	345	400	678	
5	Обладнання	355	788	600	
6	Інші витрати	45	77	89	
7					

Рис. 31

давно в природничих (математика, фізика, хімія), технічних та суспільних (економіка, статистика, фінанси, бізнес, менеджмент) науках числову інформацію представляють у наочній формі у вигляді графіків та діаграм і розробники Excel зразу ж це врахували.

Побудова діаграми розпочинається виділенням усієї таблиці разом із заголовками (у прикладі це діапазон A1:D6, що містить назви рядків A2:A6, назви стовпців B1:D1 та самі числові значення B2:D6, за якими будується діаграма, кутова клітинка A1 вільна). Відповідно, автоматично будуть розмічені осі й сформована легенда.

Вісь X в Excel зображує “категорії” (аргументи), а вісь Y — “значення” (функції).

Заголовки можуть бути й дворівневими, після виділення їх назви будуть відображені на відповідній діаграмі, наприклад (рис. 32):

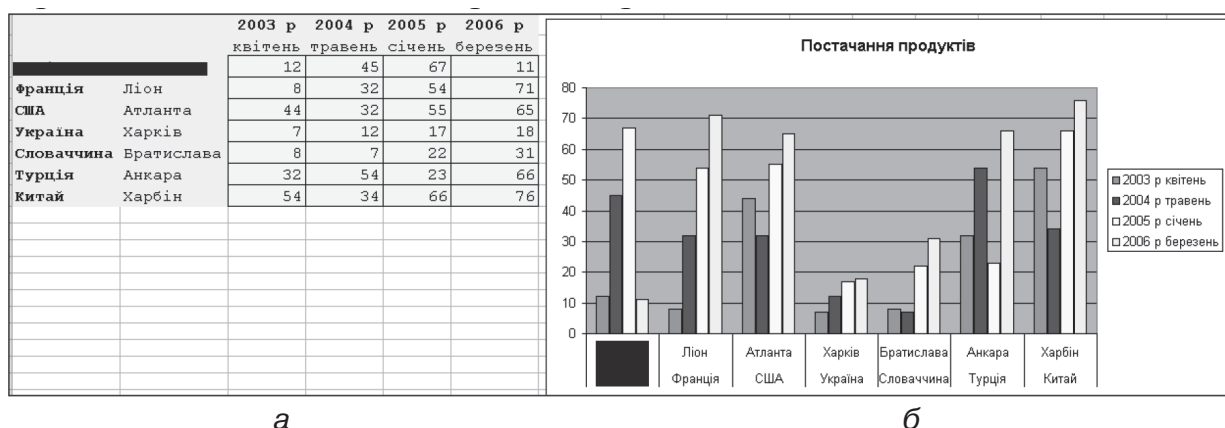


Рис. 32

Ідея ділової графіки — кожне числове значення в таблиці зображується певним графічним об'єктом — точкою, лінією, стовпцем, стрічкою, сектором круга, дугою, бульбашкою тощо, в результаті автоматичного масштабування табличних значень формується діаграма відповідного типу — точкова, стовпчикова (гістограма), лінійчаста, кругова, бульбашкова тощо.

Технологія ділової графіки передбачає здійснення двох етапів: а) побудови базового варіанта діаграма (рис. 33); б) її налаштування та форматування (рис. 34).

Після побудови базового варіанта виділення діаграми Excel замінює меню Дані на меню Діаграма й одночасно викликає корисну панель інструментів Діаграми, які доповнюють контекстне меню:

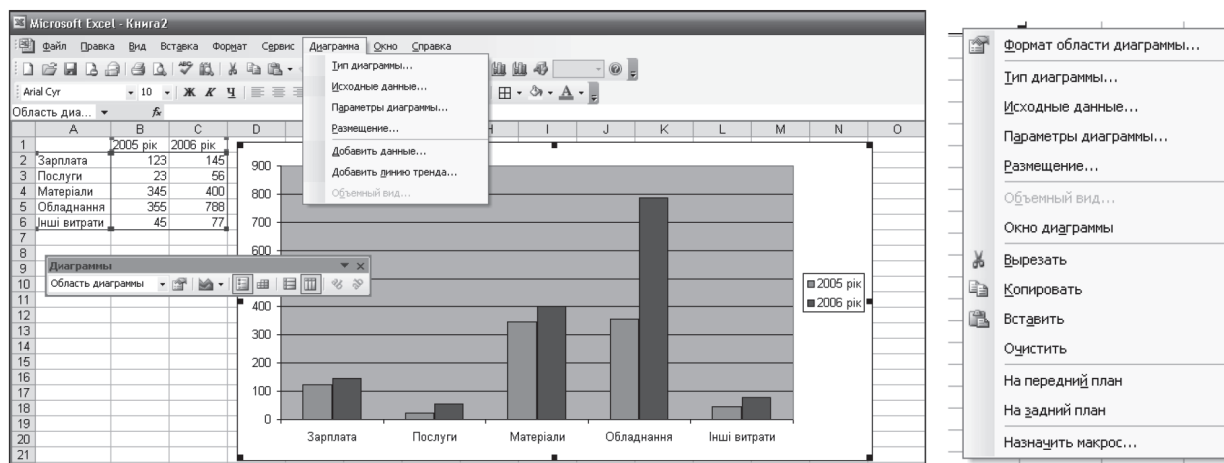


Рис. 33

Діаграма складається із 6 частин (для деяких — їх менше) (див. рис 35):

- Область діаграми (разом із заголовком, “Звіт”).
- Область побудови діаграми.
- Вісь категорій (X) разом із назвою (“Статті витрат”).
- Вісь значень (Y) разом із заголовком (“Тис. грн.”).
- Легенда.
- Значення (масштабовані, кожне числове значення має певну графічну форму: стовпець, точка, стрічка, сектор тощо):

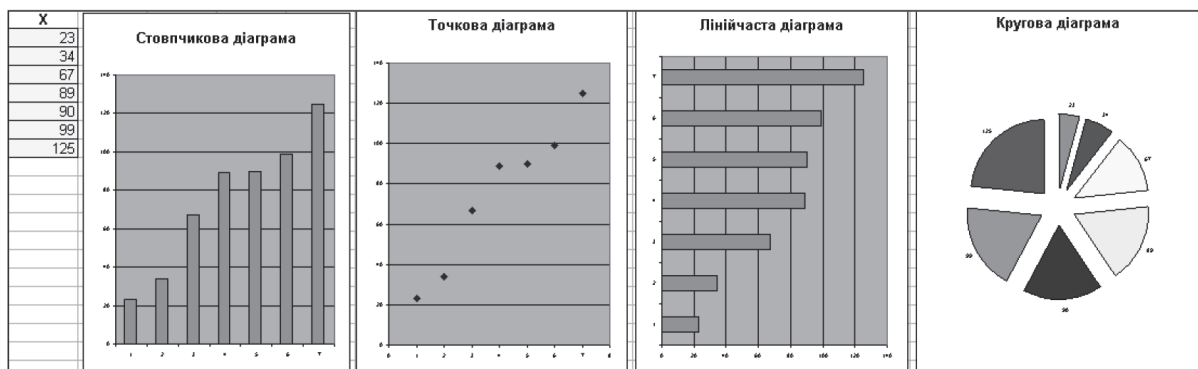


Рис. 34

Виділенням (правою кнопкою миші) певних частин можна визначити їх формат.

У середовищі Excel засоби ділової графіки реалізуються запуском редактора діаграм Microsoft Graph для виділеної таблиці (див. рис. 36):

- нашвидкуруч кнопкою **F11** (за умовчужанням будується звичайна гістограма з рядами в стовпцях і з розміщенням на окремому аркуші — цей традиційний спосіб існує з перших днів Excel і діє й досі);

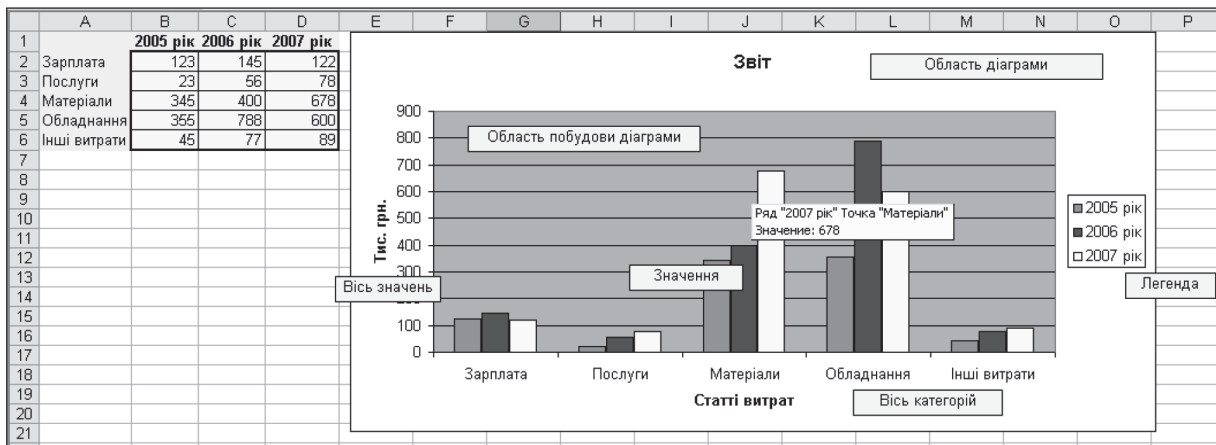


Рис. 35

- сервісною програмою **Майстер діаграм**, яка викликається командою Вставка → Діаграма або натисканням на відповідний значок , який знаходиться на панелі інструментів Стандартна (рекомендується) або ж
- взагалі з чистого аркуша командою Вставка → Об'єкт → Діаграма Microsoft Graph, побудований шаблон надалі треба налаштувати під конкретні дані і вибрати бажаний тип діаграми:

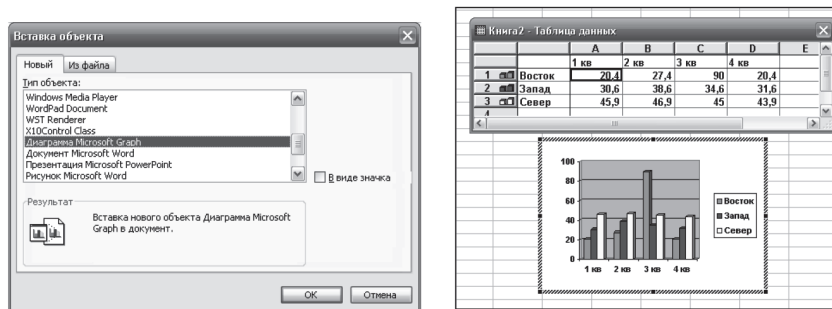


Рис. 36

Для виділеної сукупності чисел Майстер діаграм за 4 кроки побудує діаграму:

Крок 1: **Тип** діаграми (треба вибрати) (рис. 37, а).

Крок 2: **Джерело даних** діаграми (Excel визначає автоматично, вважаючи, що краще діаграму побудувати в ширину, коли кількість рядків і стовпців різні) (рис. 37, б).

Крок 3: **Параметри** діаграми (налаштування зовнішнього вигляду можна здійснити й згодом) (рис. 37, в).

Крок 4: **Розміщення** діаграми (рис. 37, г):

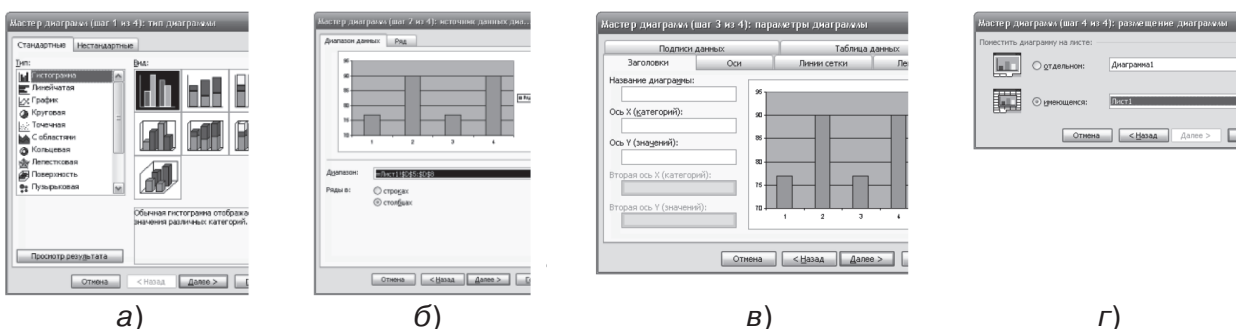


Рис. 37

1. Типи діаграм (рис. 38).

Ексел пропонує близько 100 видів різних діаграм, що складаються зі *стандартних* (14 типів) та *нестандартних* або *комбінованих* (20 типів), кожен з яких має кілька видів діаграм.

Існує можливість створити власну комбіновану діаграму, користуючись стандартними діаграмами. Для цього на готовій діаграмі треба виділити бажаний ряд даних, які треба зобразити інакше, наприклад, графіком. Відповідно в контекстному меню треба вибрати цей тип (Графік) і зафіксувати свій вибір прапорцем “Застосувати” (рис. 39):

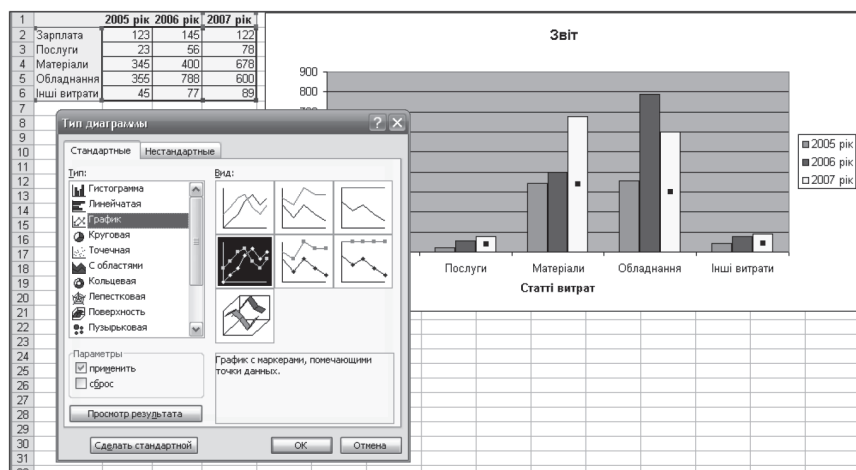


Рис. 38

Результат:

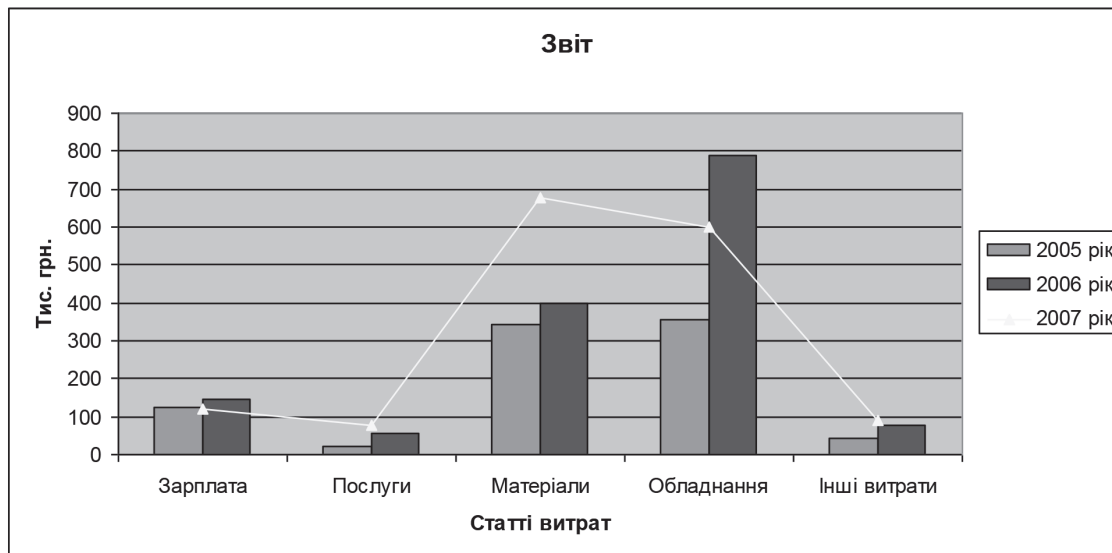


Рис. 39

2. Джерело даних — діапазон клітинок з числами, що розділений на ряди, де ряд — це набір (ланцюжок) чисел, діаграма будується по рядах, утворених в (див. рис. 40–41):

- стовпцях (стовбцях), відповідають 3 полям БД (один колір на запис), рис. 1–2, чи
- рядках (строках), відповідають 5 записам БД (один колір на поле), рис. 3–4:

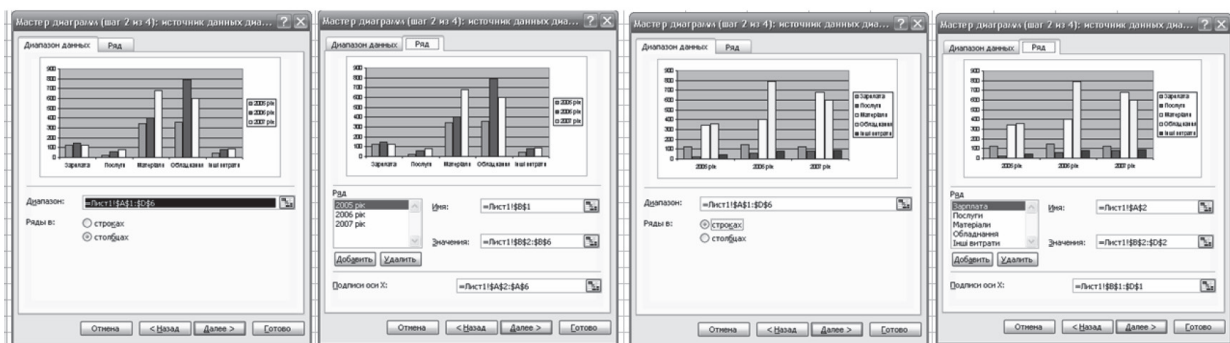


Рис. 40

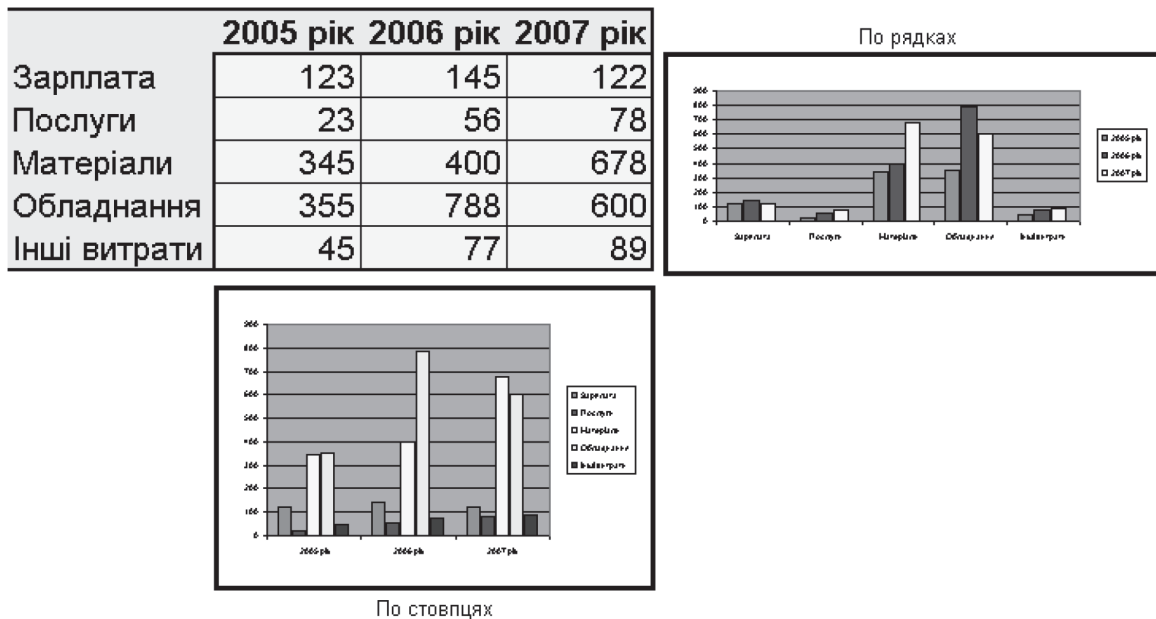


Рис. 41

3. Параметры диаграммы (рис. 42).

Параметры каждой диаграммы состояются из таких 6 блоков:

- Заголовки
- Висі
- Лінії сітки
- Легенда
- Таблиця даних
- Підписи даних,

кожен з яких містить набір відповідних команд.

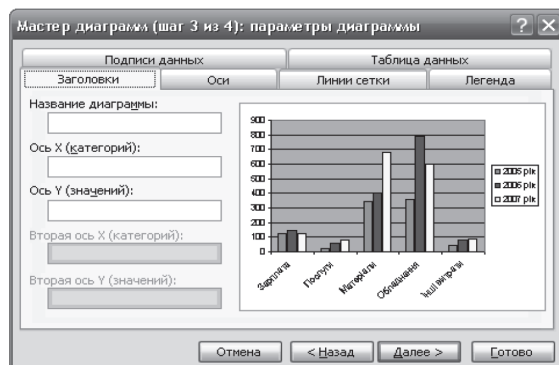


Рис. 42

4. Розміщується діаграма на:

- окремому аркуші робочої книги;
- існуючому, поруч даних.

Існує можливість на діаграмі розмістити дані, для цього на 3-му кроці (Параметри діаграми) у блоці Таблица даних треба поставити прапорець у відповідному пункті (рис. 43):

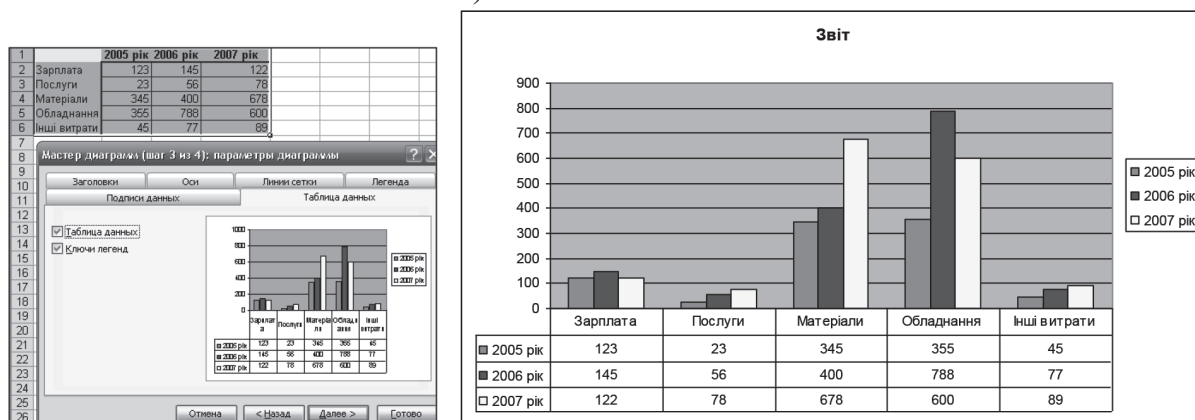


Рис. 43

Діаграма, вставлена в “батьківський” робочий аркуш, є його складовим об’єктом, на який розповсюджується технологія OLE (Правка → Спеціальна вставка).

Операції з діаграмою-об’єктом (рис. 44):

- копіювання параметрів форматування: виділити область діаграми-шаблону; команда Правка → Копіювати; виділити нову діаграму; команда Правка → Спеціальна вставка → Формати;
- додавання діаграми-шаблону в клас Нестандартні: виділити діаграму; в меню Діаграма вибрати команду Тип діаграми; перейти на вкладку Нестандартні і в позиції Ввести встановити прапорець Додаткові і потім натиснути на Додати; у вікні Додавання нового типу діаграм увести назву нового типу нестандартної діаграми (“Нова діаграма”) і, можливо, його опис. Тепер будь-яку нову діаграму будемо звичайним чином: на кроці 1 відкриваємо вкладку Нестандартні, далі команда Ввести → Додаткові і вибираємо потрібний тип:

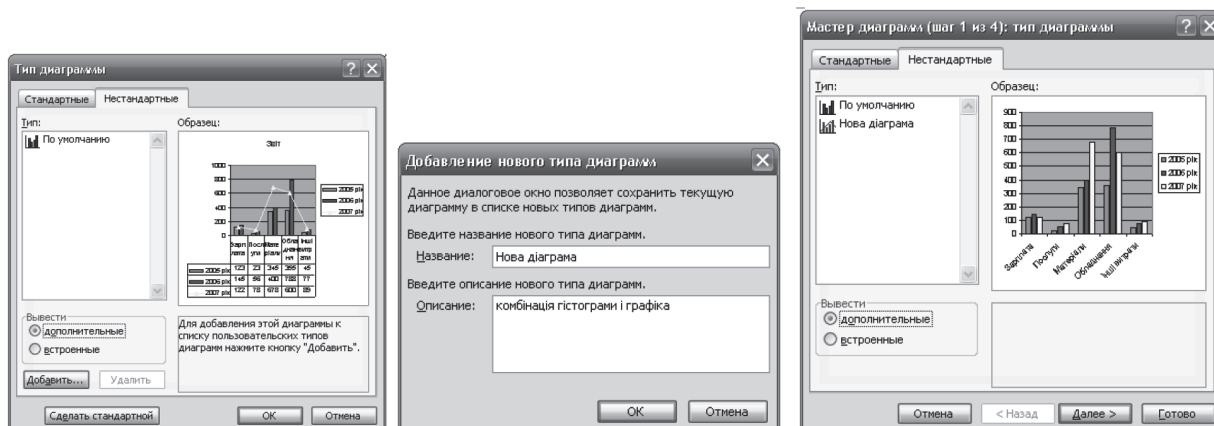


Рис. 44

Спеціальне форматування діаграми

1. Форматування заголовка діаграми (рис. 45).

- Заголовок у два чи більше рядків: двічі клацнути на заголовку Області діаграми, щоб з'явився текстовий курсор; натиснути <Enter> після курсору і набрати текст другого та наступного рядка:

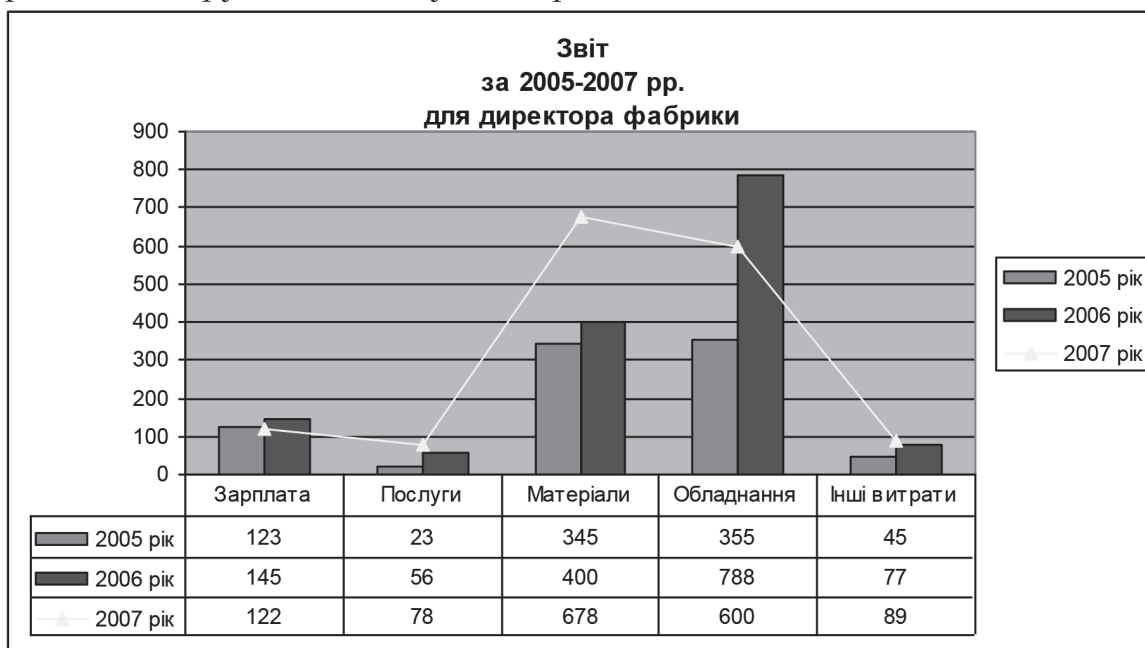


Рис. 45

- Зміна орієнтації: набрати і виділити текст заголовку і клацнути правою кнопкою, щоб викликати вікно Формат назва діаграми; на вкладці Вирівнювання задати напрямок і кут орієнтації (рис. 46, а, б):

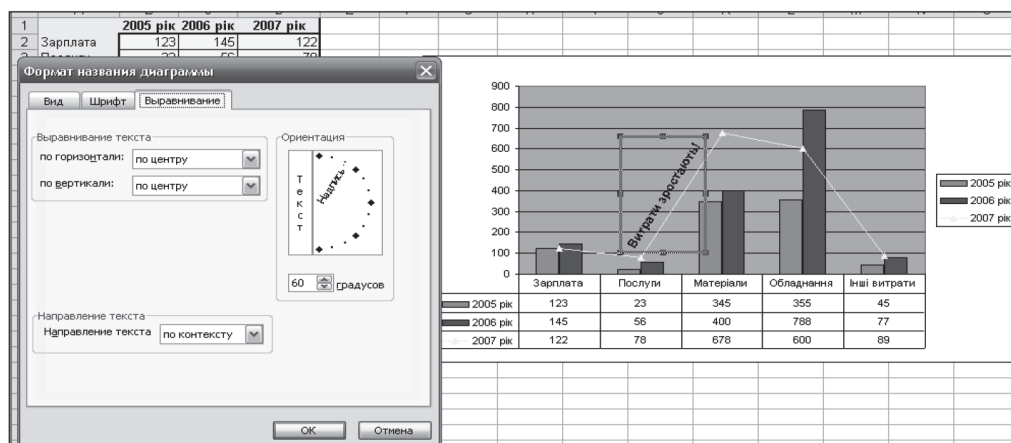


Рис. 46, а

- ### 2. Форматування осі категорій (зміна точки перетину осей).
- Для візуального порівняння двох вибірок краще розмістити початок осі значень на середині осі категорій. Для цього: сформуванати вибірку з двох частин (стовпців); побудувати діаграму; виділити правою кнопкою миші вісь X і у вікні Форма осі на вкладці Шкала у полі Перетин з віссю Y (значення) в категорії номер набрати число 2 (число 1 визначає позицію осі зліва, 2 — в центрі, а 3 — справа). Для повної симетрії легенду розмістити внизу по центру (див.рис. 47).

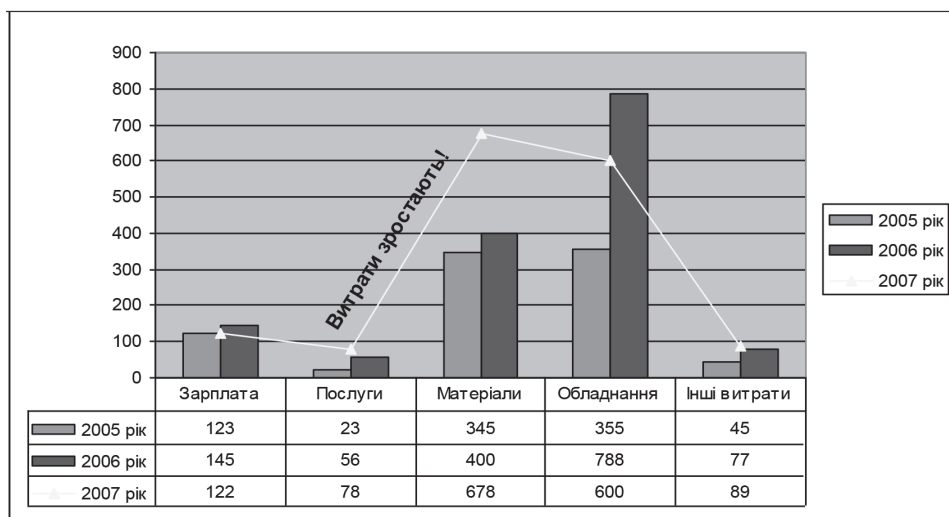


Рис. 46, б

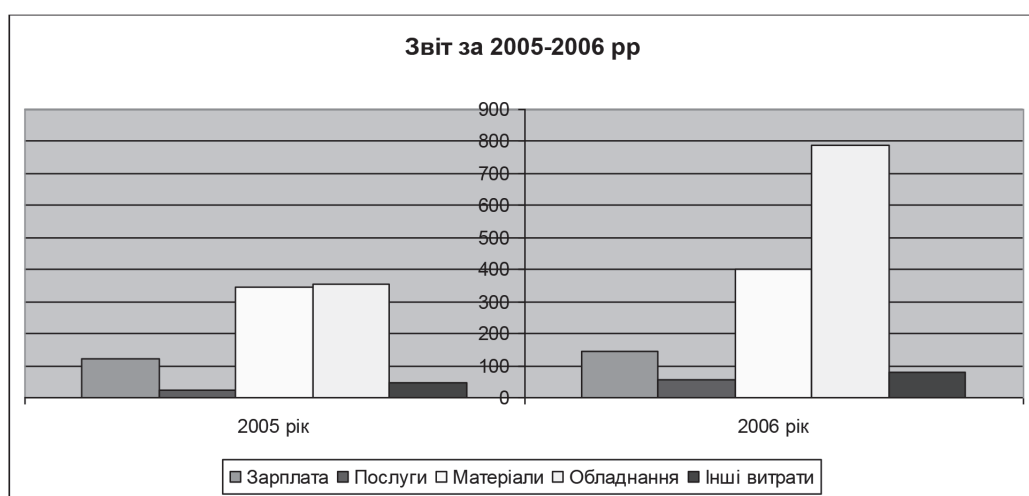


Рис. 47

3. Додавання планок похибки. При зображенні статистичних (експериментальних) даних важливо показати рівень їх достовірності, якщо є відомості про можливу похибку (скажімо, відносне значення $\pm 5\%$).

Для цього треба побудувати діаграму (типу Гістограма, Графік, Лінійна, Точкова); виділити правою кнопкою елемент діаграми (у прикладі точку); в контекстному меню вибрати пункт **Формат рядка даних** і відкрити вкладку **Y-похибки**; в розділі **Показати планки похибок по Y** вибрати планку **Обидві** (що відповідає символу $\pm$); в розділі **Величина похибки** перемикач встановити в позицію “відносне значення:” і ввести значення 5% , ОК — результат (рис. 48):

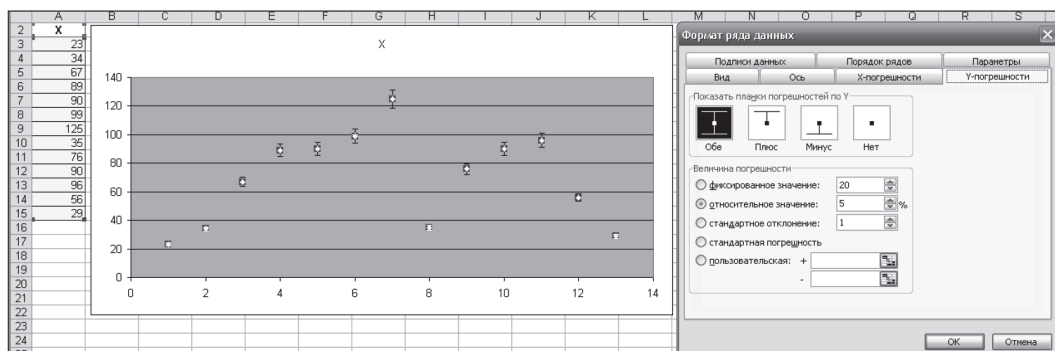


Рис. 48

8.2. Прогнозування за допомогою діаграм

Ідея: діаграма прямо пов'язана з таблицею значень даних (вибіркою), діє прямий підхід “задані значення таблиці → маркери діаграми”, тобто діаграма показує, **ЩО** буде зображено, **ЯКЩО** дані мають вказані значення. Відповідно, діаграма автоматично реагує на зміни значень даних. Пропонується зворотний підхід “таблиця ← задані позиції маркерів діаграми”, за яким визначається прогноз: **ЩО** буде в таблиці, тобто, якими будуть значення даних, **ЯКЩО** певні елементи (маркери) діаграми мають задане зображення.

Ця ідея реалізується в Excel **графічним підбором** (аналог аналітичного засобу Excel Підбір параметра, де треба знати форму функції $y = f(x)$, що не завжди можливо) — зсувом маркерів по вертикалі для відповідного значення аргументу x в таблиці автоматично визначається значення функції y .

Наприклад, нас цікавить, яким би мало бути нове значення X для 8-го періоду (зараз це 35), якщо відповідний маркер підняти уверх, аби згладити “провалину” між 6 та 10 періодами. Для цього:

- побудувати точкову діаграму (рис. 49, а);
 - виділити діаграму, щоб побачити усі маркери (рис. 49, б);
 - зробити паузу і знову виділити діаграму, щоб виділеними стали лише два сусідні маркери (7-й і 9-й) (рис. 49, в);
 - зачепити мишкою 8-й маркер і потягнути його доверху до бажаної позиції (рис. 49, г);
- д) результат — “провалини” не буде, якщо значення X буде рівним приблизно 93 (рис. 49, д).

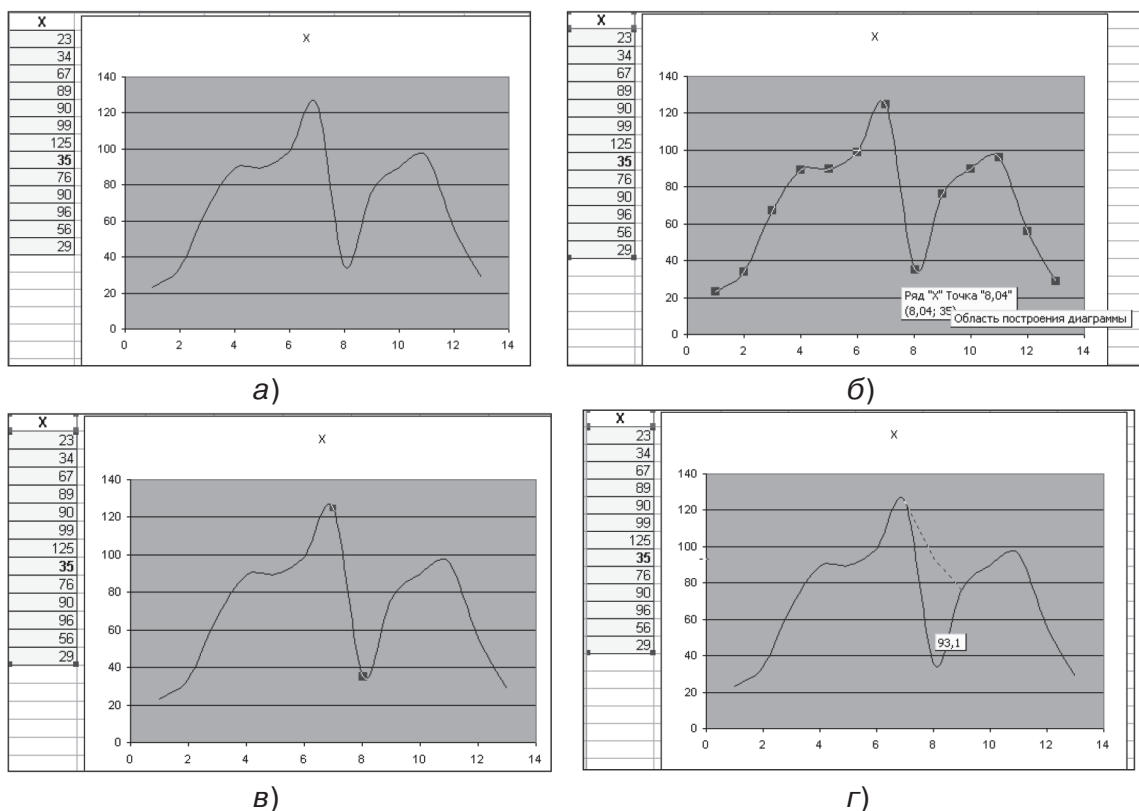


Рис. 49

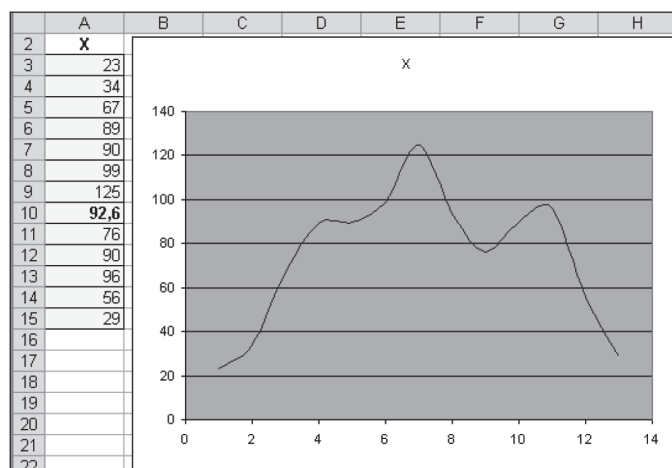


Рис. 49, д

Цей спосіб можна застосувати в задачі поновлення відсутніх даних всередині масиву (задача інтерполяції) чи поза його кінців (екстраполяція).

Зображення уявної лінії прогнозу

Маємо: а) вибірку даних; б) певне власне уявлення щодо майбутніх значень у вигляді набору даних. Щоб зобразити ці два набори даних, треба побудувати дві, скажімо, точкові діаграми таким чином, щоб вони обидві мали спільну точку дотику. Для цього формуємо таблицю початкових даних таким чином, щоб значення останньої точки першого (заданого) набору дорівнювало значенню першої точки другого (прогнозного) набору; будуємо точкову діаграму для цих двох наборів значень; формат другої лінії зробити відмінним від формату першої лінії. Результат (рис. 50):

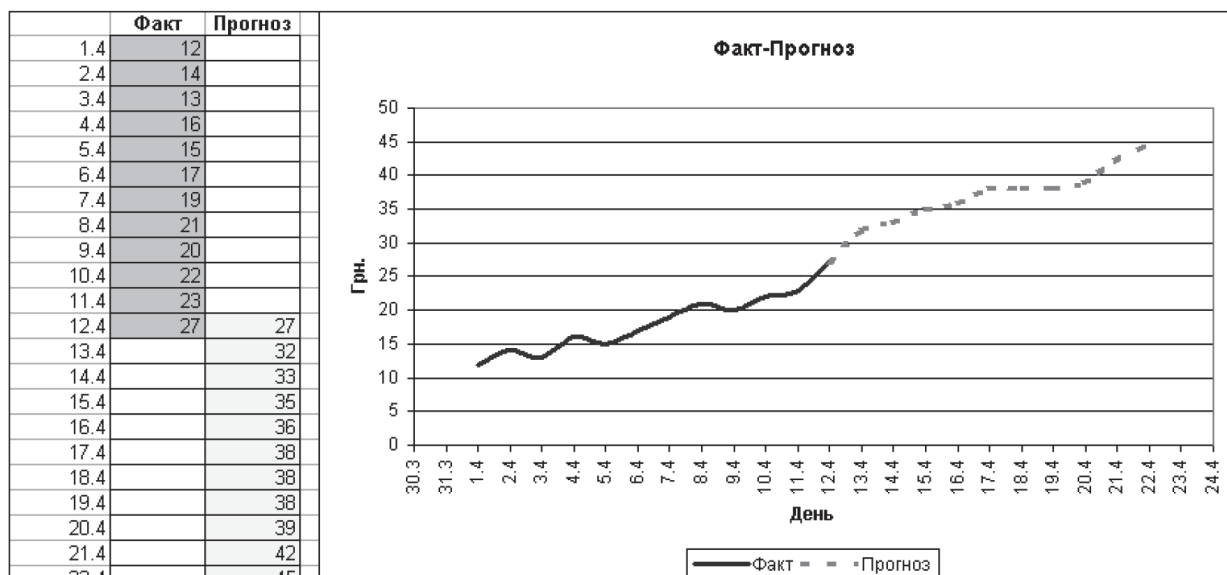


Рис. 50

8.3. Наукова графіка

Наукова графіка завжди супроводжувала й обслуговувала теоретичну та експериментальну науку, ставлячи за мету побудову графіків математичних функцій, побудованих із точок з заданими координатами, з'єднаних між собою лініями. Виникнення цієї технології зобов'язано англійському математику Джеймсу Сільвестру (James Sylvester), який у 1878 р. увів в ужиток слово “графік” (graph) і першим опублікував колекцію графіків математичних функцій. Довгий час це була суто ручна робота, аж поки вже у наші часи не був винайдений осцилограф, на екрані якого можна спостерігати форму електричних сигналів.

В Excel цю задачу з успіхом реалізує Майстер діаграм за допомогою точкових діаграм типу Графік та Точкова. Успіх полягає в простоті реалізації й автоматичному реагуванні побудованої діаграми на зміни початкових даних за принципом “що-якщо”. Фактично, в Excel цим способом створюється віртуальний осцилограф, який дозволяє будувати графіки будь-яких функцій, однієї чи кількох одразу, у визначеній системі координат, з однією чи двома осями, пласкі чи об'ємні (за допомогою, зокрема, засобу Таблиця підстановки).

Точкова діаграма (scatter graph) містить один чи кілька графіків функцій, заданих окремими чи з'єднаними між собою точками, у прямокутній (декартовій) системі координат, кожен графік представлений у табличній формі (два стовпця X та $f(X)$). Як прийнято у науковій практиці, на горизонтальній осі X (категорій) відкладають значення аргументів (незалежної змінної, параметру), а на вертикальній осі Y — значення функції (залежної змінної). Головна задача такої діаграми — показати залежність (кореляцію) між значеннями цих змінних. Це популярний засіб техніки апроксимації — наближення експериментальної функції у табличній формі аналітичною функцією. Основним достоїнством цього інструменту є можливість миттєво показати нелінійну залежність між змінними, адже довгий час для експериментаторів це була чи не найважча робота — обчислювати за формулами координати точок і креслити вручну відповідні графіки. І нарешті, точкова діаграма — класичний засіб для дослідження математичних функцій. Саме такими функціями в економетрії визначають залежності між певними економічними показниками, а в математичній статистиці їх застосовують у парній лінійній та нелінійній регресії.

8.3.1. Функція

У світі є явища, поняття, ситуації, люди чи будь-які об'єкти, що, здається, існують самі по собі, тобто наче вони не залежать одне від одного — відповідні числові показники характеризують їх СТАНИ, що визначаються **постійними** величинами.

З іншого боку, між явищами, поняттями, ситуаціями, людьми чи об'єктами явно існують певні логічні, причинні чи часові зв'язки і залежності, тоді

відповідні числові показники характеризують їх рух і визначають як ПРОЦЕСИ, що характеризуються **змінними** величинами.

Нас будуть цікавити саме змінні величини, зв'язки і залежності між ними, оскільки, знаючи про них, поведінку відповідних об'єктів у вигляді процесів можна передбачати й, відповідно, здійснювати планування і управління ними.

З елементарної й вищої математики відомо, що саме фундаментальне поняття математичного аналізу “функція” визначає **залежність** однієї змінної (y) від змінної (x), за якою кожному значенню x відповідає одне значення змінної y . Тоді, відповідно, кажуть про однозначний або *функціональний зв'язок* між цими двома змінними, що має узагальнений вигляд $y = f(x)$.

Відомо також, що значення залежної змінної y може бути функцією одночасно кількох незалежних змінних $x_1, \dots, x_n$ у вигляді $y = f(x_1, \dots, x_n)$, між якими, своєю чергою, можуть існувати певні зв'язки. Так, якщо дохід магазину y залежить від кількості відвідувачів k , значить дохід є функцією числа відвідувачів $y = f(k)$. Якщо ж ми упевнені, що число відвідувачів досить суттєво залежить від дня тижня у вигляді функції $g(d)$, значить дохід магазину опосередковано є складеною функцією $y = f(g(d))$. Так абстрактне поняття “функція” стає необхідним, звичним й зрозумілим для менеджера магазину, адже тепер він (менеджер) зацікавлений визначити форму відповідної залежності, щоб отримати можливість оперувати нею для прогнозування й управління величиною майбутнього доходу.

Саме це і є предметом економетрії у її широкому розумінні як дисципліни, де досліджуються економічні процеси із застосуванням математичних та статистичних методів та засобів економічної інформатики.

Змінну x називають незалежною змінною (*аргументом*), а змінну y — залежною від x змінною (*функцією*). Коротко загальну залежність y від x позначають так: $y = f(x)$, де буквою f (від лат. *functio* — функція) чи якоюсь іншою (F, g, ϕ, Ψ) позначають саме поняття “функція”, читають: “ y дорівнює f від x ”, якщо сама форма залежності $f(x)$ ще остаточно не визначена, але точно відомо, що вона існує.

Якщо ж зміст $f(x)$ визначено, тоді пишуть так:

$$y = 2x^2 - x + 7 \quad \text{або} \quad f(x) = 2x^2 - x + 7.$$

8.3.2. Способи задання функції

Відомо, що задати функцію можна:

- таблицею, отриманою з експерименту;
- графіком;
- формулою.

Шляхом певних перетворень можна перейти від однієї форми представлення функції до іншої. Розглянемо переходи:

- таблиця $\rightarrow$ графік та формула $\rightarrow$ графік (предмет наукової графіки);
- таблиця $\rightarrow$ графік $\rightarrow$ формула (задача апроксимації).

Таблична форма загальновідома (це, скажімо, дані опитувань чи експериментів, таблиці логарифмів, норм чи стандартів, значення різноманітних розрахункових коефіцієнтів, випадкових чисел тощо), її достоїнство — отримання готового числового значення функції для заданого аргументу, недоліки: важкість роботи вручну з великими за розмірами таблицями, відсутність готового значення функції при певному значенні аргументу, якого нема в таблиці. Вибірки, отримані з баз даних, є табличним представленням економічних даних, за якими будується прогноз.

Графічна форма характеризується наочністю, легкістю огляду усієї множини значень функції для заданого діапазону неперервної зміни значень аргументу, недолік: обмежена точність отриманого значення функції.

Аналітична форма складається в завданні функції однією чи кількома формулами. Наприклад, функціональна залежність: довжини шляху від швидкості руху, об'єму випуску продукції від продуктивності, площі поверхні циліндру від радіусу основи й висоти тощо.

Якщо залежність між x та y виражена рівнянням, заданим відносно y , тоді величина y є **явною** функцією аргументу x (наприклад, $s = 2\pi r$, де s — довжина кола, r — його радіус), інакше — **неявною** функцією (наприклад, відомо лише, що $\frac{s}{r} = 2\pi$, де не визначено, що є функцією, а що — аргументом).

ОВФ та ОЗФ

Всі допустимі значення аргументу x , для яких функція $f(x)$ існує (визначена), утворюють ОВФ (*область визначення функції*), а всі значення y — ОЗФ (*область значень функції*). Наприклад:

- для функції $f(x) = ax + b$ (її графік — пряма лінія) ОВФ — множина усіх чисел, а ОЗФ — множина усіх чисел при $a \neq 0$ і єдине число b при $a = 0$;
- для функції $f(x) = \frac{k}{x}$ (гіпербола) ОВФ $\equiv$ ОЗФ — множини усіх чисел, окрім 0 (при $x = 0$ функція терпить розрив).

ОВФ задають одним чи кількома числовими “проміжками” чи діапазонами.

Проміжок (або інтервал) (a, b) — це нескінченна сукупність чисел x , укладених між числами a, b , де a, b — кінці (границі) проміжку (a, b) , $a < b$, тобто $a < x < b$. Якщо до точок проміжку додаються обидва значення кінців a, b , тоді йдеться про замкнений проміжок чи відрізок.

Для економічних задач ОВФ чи ОЗФ найчастіше є проміжками (відрізками чи напіввідрізками):

$[0, \infty)$, для $0 \leq x < \infty$;

$(0, \infty)$, для $0 < x < \infty$;

(a, ∞) , для $a < x < \infty$;

(a, b) , для $a < x < b$.

Так, для функції $f(x) = \sin(x)$ ОВФ це проміжок $(-\infty, \infty)$, тоді як ОЗФ — $[-1; +1]$.

Пряма і обернена до неї функції

Якщо у певній функціональній залежності $y = f(x)$ аргумент і функцію поміняти місцями, ми отримаємо нову функцію $x = F(y)$, яка називається **оберненою** відносно заданої (прямої), пару таких функцій називають **спряженими**. Скажімо, ми знаємо залежність доходу від кількості покупців, відповідно, для прогнозування цікавою може бути залежність очікуваного числа покупців від розміру доходу магазину.

Наприклад, є пряма лінійна функція $y = 5x + 2$, для якої оберненою функцією є $5x = y - 2 \Rightarrow x = 0,2y - 0,4$, їх графіки мають вигляд (рис. 51):

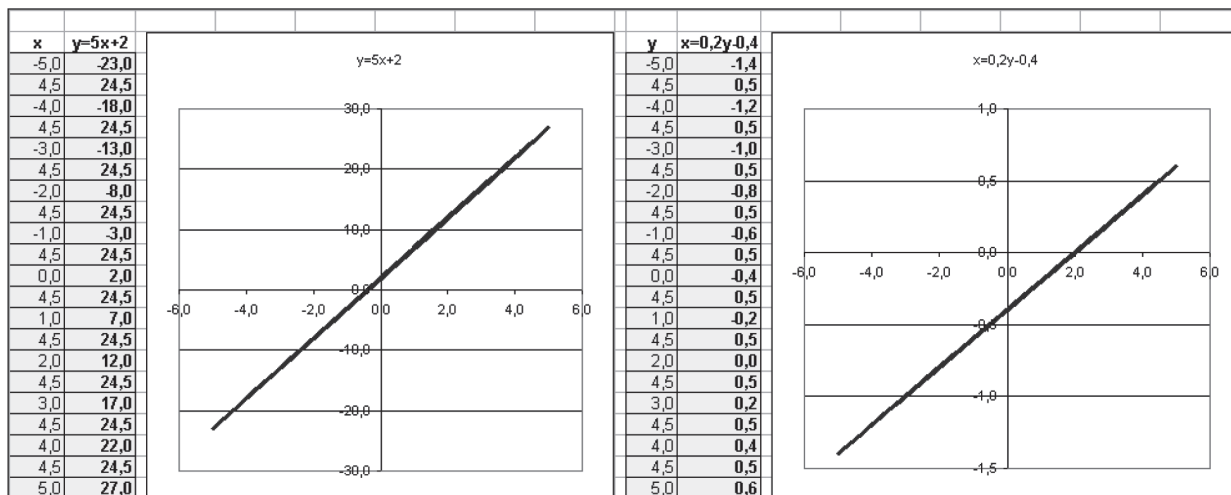


Рис. 51

Або, наприклад, задана функція $u = v^2$, поміняємо місцями аргумент і функцію, отримаємо залежність $v^2 = u$, де величина v вже є функцією від аргументу u і представлена формулою $v = \pm\sqrt{u}$.

Користуючись змінними x та y для звичного позначення аргументу і функції, маємо явно задану пряму (квадратичну) функцію $y = x^2$, визначену усюди, і функцію, обернену до неї $x = \pm\sqrt{y}$, визначену лише для $y \geq 0$ (рис. 52):

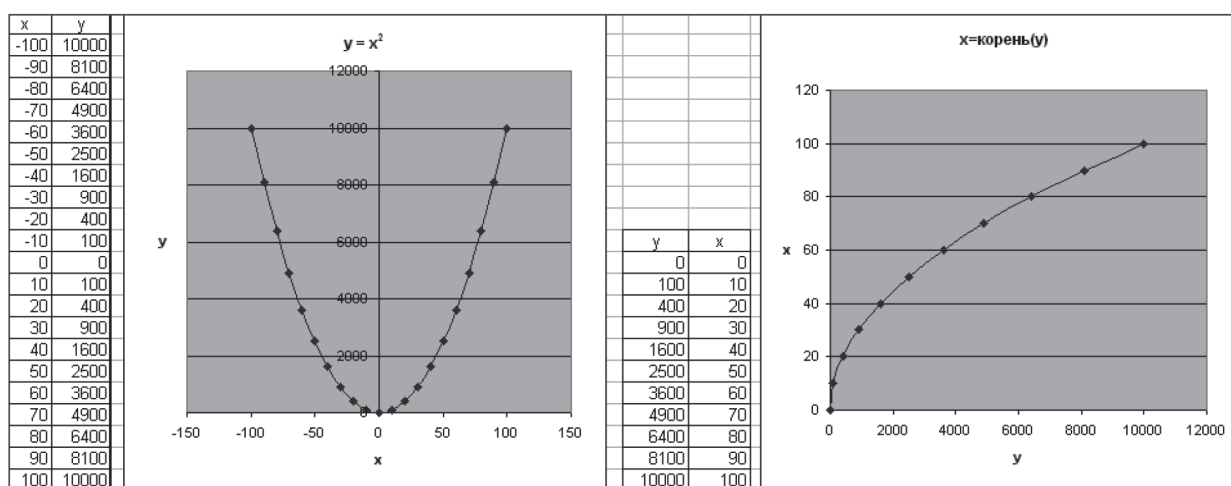


Рис. 52

Виходить, що пряма й обернена до неї функції не завжди є віддзеркаленням одна одної, це зовсім різні функції зі своїми властивостями, зокрема, ОВФ. Більш того, далеко не завжди для заданої прямої функції можна запи-

сати у вигляді формули обернену до неї. Єдине, що можливо, це побудувати графік такої функції, маючи графік функції заданої.

Наприклад, задана функція $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, можна побудувати графік для неї самої й для функції, оберненої до неї (рис. 53):

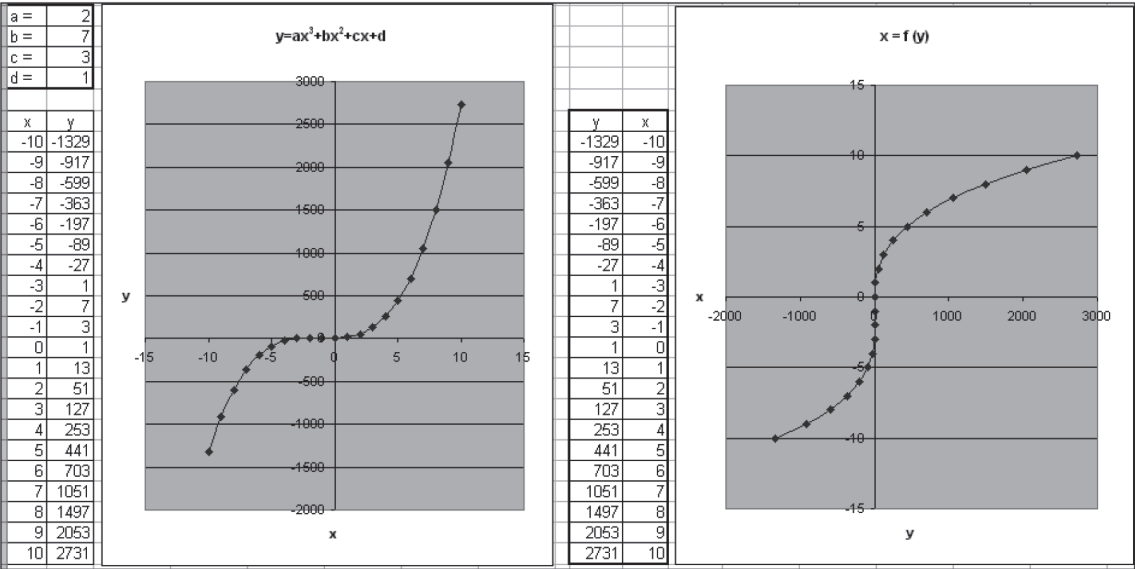


Рис. 53

Графік оберненої функції можна зобразити шляхом простих маніпуляцій з графіком заданої функції як графічним об’єктом (рис. 54):

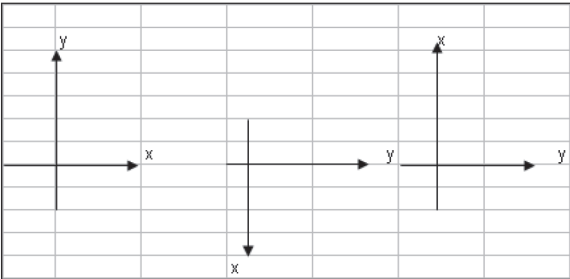


Рис. 54

- а) побудувати і зберегти графік як малюнок (вставкою у Word) (рис. 55, а);
- б) виконати з ним команду “Повернути вправо на 90°” (рис. 55, б);
- в) виконати з повернутим малюнком команду “Відобразити зверху вниз” за схемою (рис. 55, в):

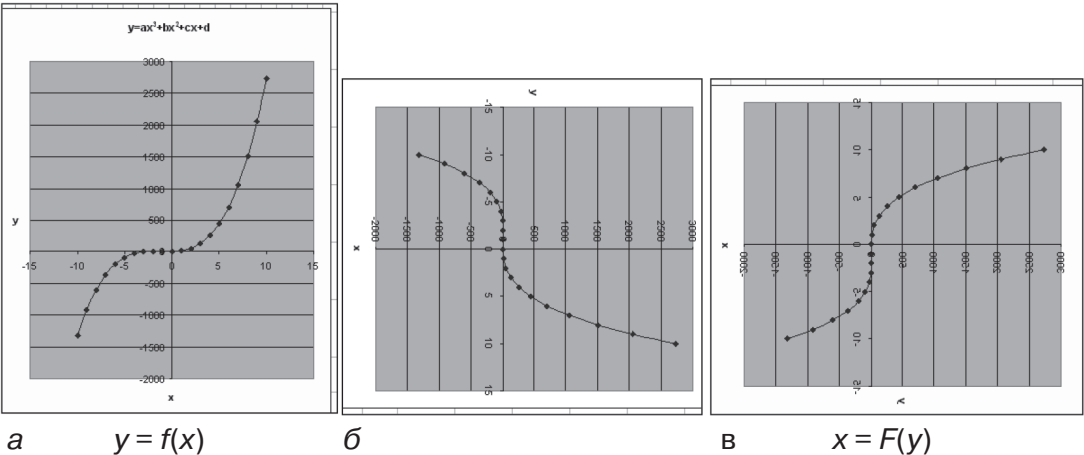


Рис. 55

але записати цю функцію у явній формі неможливо, а лише в загальному вигляді: $y = F(x)$.

8.3.3. Позначення і запис функцій

Знак $f(x)$ (читається “еф від ікс”) є скороченим записом словесного виразу “функція від x ”, він застосовується як для невідомої, так і для відомої функції, де буква f називається характеристикою (виглядом) функції. Запис $f(x)$ визначає факт, що величина y дорівнює якійсь функції від x , тобто, що y є функцією аргументу x , наприклад, Вартість = f (Ціна).

Якщо одночасно розглядаються між собою кілька різних функцій від одного аргументу x , тоді їх позначають, скажімо, так: $f_1(x)$, $F(x)$, Випуск(x).

Якщо знайдено чи задано вираз залежності y від x , тоді цей вираз з’єднують з $f(x)$ знаком “=”. Наприклад, якщо відомо, що $y = x^2$, тоді пишуть $f(x) = x^2$.

Приклади:

- Запис $f(x) = \lg x$ однозначно визначає, що функція $f(x)$ є логарифмічною.
- Запис $\Phi(x) = f(x) + F(x)$ визначає, що функція $\Phi(x)$ є сумою двох функцій $f(x)$ та $F(x)$. Композиції кількох функцій називають складеними функціями, так, якщо $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ й $F(x) = 5x$, тоді справедливі композиції функцій типу:

$$f(x) + F(x) = \sqrt{1+x^2} + 5x, \quad f(x)F(x) = 5x\sqrt{1+x^2}, \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- Запис $f_1(x) = f_2(x)$ означає, що дві функції рівні (можливо, лише при певних x).
- Запис $\text{Витрати} = f(\text{Випуск})$ показує, що витрати (функція Витрати) певним чином залежать від об’єму випуску продукції (аргумент Випуск).
- Записи $u = \psi(v)$ та $z = \psi(c)$ показують, що значення функцій u та z однаково залежать від аргументів v та c , наприклад, якщо $u = \pi v^2$, то й $z = \pi c^2$.
- Якщо $f(x) = 1940$, це означає, що при будь-яких аргументах значення функції незмінне: $f(y) = 1940$, $f(z) = 1940$.
- Записи $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f(ax^2 + bx + c)$ означають, що беруться значення однієї функції $f(x)$ для різних значень аргументів: для $x = 1$, $x = \sqrt{3}$, $x = a^2 + bx + c$.
- Якщо $\phi(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$, тоді при $\alpha = 2$ маємо $\phi(\alpha) = 1 + 2 + 2^2 = 7$, $\phi(\pi) = 1 + \pi + \pi^2 \cong 14,011$.

8.3.4. Класифікація функцій

Функції бувають:

а) *однозначні* (кожному значенню аргументу відповідає одне значення функції, наприклад, $s = vt$, де s — відстань, v — швидкість, t — час) та *бага-*

тозначні (кожному значенню аргументу відповідає більше одного значень функції, наприклад, якщо $y^2 = x$, тоді $y = \pm\sqrt{x}$) функції;

б) представлені формулами розділяються на *явні* та *неявні*;

в) *елементарні* та *неелементарні* (складені з елементарних);

г) *алгебраїчні* (неперервні й диференційовані) та *трансцендентні* (з розривами).

8.3.5. Основні елементарні функції

Основна елементарна функція представляє собою певну стандартну “дію” над аргументом, яка має фіксоване загальновизначене позначення типу: ax , $\sqrt{x}$, $\lg(x)$, $\sin(x)$, x^5 .

Шляхом повторення й зв’язування цих “дій” між собою чотирма арифметичними операціями отримують нові функції, які теж відносять до елементарних, але вже не до основних, це, зокрема:

Лінійна (пропорційна) функція: $y = ax + b$.

Степенева функція: $y = x^b$ або $y = ax^b$, при $b = 1$ маємо лінійну функцію $y = ax$.

Показникова функція $y = m^x$ або $y = am^{bx}$, де a — основа степені, $a > 0$, $a \neq 1$.

При $m = e$ ($e = 2,71...$ — основа натурального логарифму) маємо експоненційну функцію $y = e^x$ або $y = ae^{bx}$.

Логарифмічна функція: $y = \log_m x$ або $y = a \log_m x + b$, де a — основа логарифма, $a > 0$, $a \neq 1$, зокрема:

десятькова логарифмічна: $y = \lg x$, $y = a \lg x + b$ ($m = 10$);

натуральна логарифмічна: $y = \ln x$, $y = a \ln x + b$ ($m = e$).

Поліноміальна функція $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, де n — степінь полінома, при $n = 1$ маємо лінійну функцію $y = a_0 + a_1x$.

Тригонометричні функції:

періодичні: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{sc} x$, $y = \operatorname{csc} x$;

гіперболічні: $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$;

кругові (обернені): $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$;

$y = \operatorname{arcsch} x$, $y = \operatorname{arcch} x$, $y = \operatorname{arch} x$.

З основних елементарних функцій можна утворювати інші елементарні функції за допомогою скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) і операції узяття функції від функції, наприклад:

$$y = x^2 + \sqrt{x}, \quad y = \frac{10^x + 5}{5x^2}, \quad y = \log_2(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad y = \sin \sqrt{x}, \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}.$$

Елементарні функції ділять на два класи: алгебраїчні і трансцендентні функції. Значення алгебраїчних функцій одержують виконанням алгебраїчних операцій: арифметичних та піднесення до степеня з раціональним показником. Усі прямі й обернені тригонометричні функції, показникові і логарифмічна функції є трансцендентними, їх значення не можуть бути ко-

реннями будь-яких алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами, сюди ж відносять числа e та π .

Програма-надбудова **Майстер функцій** Excel пропонує:

- степеневу функцію **СТЕПІНЬ** (піднесення числа a у степінь b , $y = a^b$);
- експоненційну функцію **EXP** ($y = e^x$);
- логарифмічні функції:
 - **LN** (натуральний, $y = \ln x$);
 - **LOG** (довільна основа a , $y = \log_a x$);
 - **LOG10** (десятковий, $y = \lg x$);
- усі визначені тригонометричні функції,

а також:

- **КОРІНЬ** (квадратний корінь числа x , $y = \sqrt{x}$);
- **ABS** (абсолютне значення дійсного числа x , $y = |x|$);
- **ПИ** (число π);
- **ФАКТОР** (факторіал, $y = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$);
- **ЦІЛЕ** (ціла частина дійсного числа x , $y = [x]$).

Розмаїтість практичних задач не може обмежуватися вбудованими функціями, тому дослідники утворюють оригінальні неелементарні функції у вигляді певних комбінацій елементарних функцій згідно із задачею, що розв'язується, деякі з них набули властивостей загальновідомих (типу виробничої функції Кобба-Дугласа чи формули Уїлсона для визначення оптимального розміру замовлення в управлінні запасами тощо), в Excel є можливість створити **функцію користувача** у вигляді підпрограми мовою VBA і користуватися нею у розрахунках як стандартною, викликаючи її по заданому їй імені і задаючи відповідні аргументи.

Статистичний зв'язок

На відміну від визначеного “однозначного” функціонального зв'язку в математичній статистиці між величинами функції $f(x)$ та аргументу x існує “багатозначний” статистичний зв'язок, коли кожному значенню аргументу x відповідає група значень функції $f(x)$ у вигляді їх середнього арифметичного.

Одна з основних задач економетрії — наблизити (замінити з певною похибкою, в математиці кажуть — апроксимувати) набір упорядкованих статистичних даних однозначною функцією (формулою). Це означає, що необхідно визначити статистичний зв'язок між даними, заданими таблицею, й представити його компактно і зручно для обчислень у вигляді певної функції.

Рівняння

Якщо функцію явно записати так, щоб зліва від знаку “=” знаходилася шукана невідома величина, а справа — відомі дані у вигляді певного математичного виразу, тоді така конструкція називається рівнянням (або просто формулою), призначеним для визначення невідомої величини y для заданого

значення x . Так, загальна форма функції, представленої у явній формі типу $y = 2x^2 - x - 1$, є квадратним рівнянням (або поліномом другої степені).

Пряма задача **обчислення функції**: знайти значення функції $y = 2x^2 - x - 1$ для заданого значення x . Наприклад, при $x = 2$ маємо $y = 5$.

“Протилежна” до прямої задача називається **розв’язанням рівняння**, де зліва від знаку “=” вираз $f(x)$, а справа — конкретне значення, тож треба знайти таке значення x , для якого $2x^2 - x - 1 = 0$, якщо таке значення існує (рис. 56).

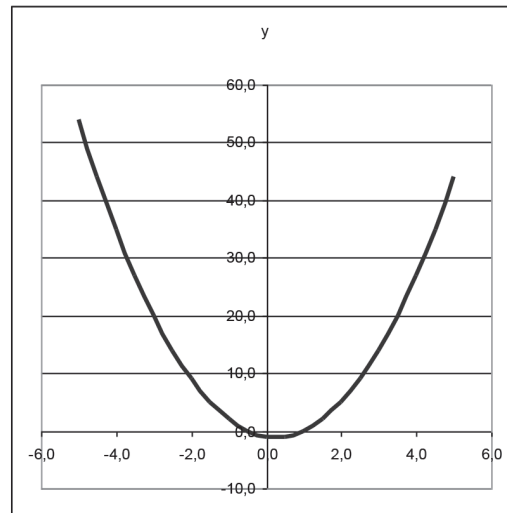


Рис. 56

Коли рівняння задане графіком функції, шукане значення x для заданого значення y є абсцисою точки перетину цього графіка з віссю x (на рисунку таких абсцис дві: $x_1 = -0,5$, $x_2 = 1$), якщо ж рівняння задане в аналітичній формі (формулою), розв’язують таке рівняння спеціальним обчислювальним методом. В Excel для цього застосовують зручний і потужний інструмент — програму-надбудову Підбір параметра (пункт меню Сервіс).

8.4. Графік функції

Дві змінних утворюють прямокутну систему координат на площині з двома осями: абсцис (x) та ординат (y). Графіком функції $y = f(x)$ є множина усіх точок координатної площини, абсциси яких є значеннями аргументу x , а ординати — відповідними значеннями функції $f(x)$. Графік функції є ефективним і зручним засобом візуалізації форми і загального вигляду функції, що досліджується, бо саме лише після наочного представлення табличних даних, які описують економічний процес, можна проводити відповідний статистичний аналіз і моделювання цього процесу з метою його планування та управління ним.

В економетриці при обробці статистичних даних майже завжди діє умова $x \geq 0$, це означає, що ОВФ для наведених нижче прикладів задач є множиною $[x_{\min}, x_{\max}]$, де $x_{\min} = 0$, $x_{\max} \geq 0$, тобто, $x \in [0, x_{\max}]$.

Побудова графіків функцій $y = f(x)$ для $x \in [0, x_{\max}]$ в Excel — предмет цього розділу.

Приклад 1. Для функції, заданої явно рівнянням $y = f(x)$; ОВФ $x \in [0, x_{\max}]$ і числом точок розбивки ОВФ (n), треба побудувати її графік.

Ідея: неперервну функцію $y = f(x)$ в області визначеності функції, заданої числовим проміжком $[x_{\min}, x_{\max}]$, **табулюють** (від лат. *tabula* — таблиця), тобто представляють числовою таблицею. Для цього:

- проміжок $[x_{\min}, x_{\max}]$ розбивають на n ділянок (значення n задано) з кроком $h_x = (x_{\max} - x_{\min})/n$,
- визначають $n + 1$ точку зі значеннями аргументу $x_i, i = 0, \dots, n$, які знаходять за рекурентною формулою:
 $x_0 = x_{\min}, x_1 = x_0 + h_x, x_2 = x_1 + h_x, \dots, x_n = x_{n-1} + h_x$ і т. д.;
- для кожного значення аргументу x_i обчислюється відповідне значення функції $y_i = f(x_i)$.

Отже, неперервна функція $f(x)$ перетворюється у дискретну (переривчасту) форму у вигляді таблиці з $n + 1$ пар чисел $(x_i, f(x_i))$ і далі зображується набором (виокремлених чи з'єднаних лініями) $n + 1$ точок з координатами $(x_i, f(x_i)), i = 0, \dots, n$ у вигляді точкового графіка (його назва в Excel — діаграма Точкова).

Точковий графік є лише наближенням до заданої функції, бо лише у самих точках значення функції задані точно, а значення функції поміж ними фактично невизначені, для наочності їх умовно зображують “містком” — прямою лінією. При цьому треба розуміти, що значення функції, визначені поміж точками таким чином, у загальному випадку можуть бути хибними або реально навіть не існувати, що може містити сховану небезпеку.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ не існує при $x = 0$, але можна так побудувати графік, минувши точку $x = 0$ серед значень аргументів, що наче ця властивість не існує (рис. 57, а, б):

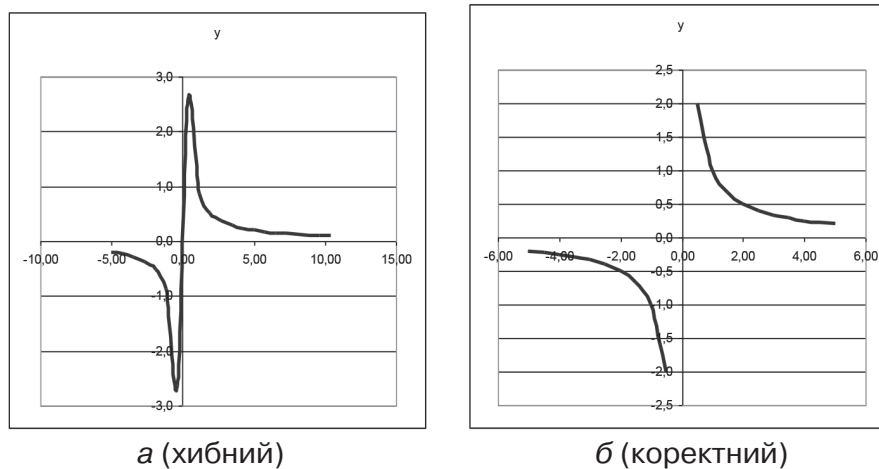


Рис. 57

Отже, перед побудовою графіка функції треба провести аналіз заданої функції, щоб своєчасно врахувати можливі “аварійні” ситуації типу “ділення

на 0” чи “добування квадратного кореня з від’ємного числа”. Отже, графіки функцій $f(x)$ будують, щоб наочно представити загальний характер певного процесу за принципом “краще один раз побачити”. Вони традиційно застосовуються в економетричних дослідженнях зі свідомим розумінням механізму їх створення.

Таким чином, в інформатиці технологія побудови пласких (2-вимірних, 2D-графіка) та об’ємних (3-вимірних, 3D-графіків) активно застосовується в комп’ютерних іграх та фільмах) графіків функцій, заданих таблицями чи формулами, утворює розділ **наукової графіки**, для якої застосовують спеціальні алгоритми і програмні продукти під загальною назвою “графічні редактори”.

У прикладні програми офісного пакета MS Office і, зокрема, в середовище MS Excel вбудовано такий продукт у вигляді сервісної процедури Майстер діаграм (реалізована у вигляді програми MS Graph, яка викликається з будь-якої офісної прикладної програми), у ній для побудови графіків функцій застосовують стандартні діаграми типу Точкова та Графік, кожна має дві чи три осі:

- горизонтальна вісь x (в математиці — абсцис, в Excel — категорій);
- вертикальна вісь y (в математиці — ординат, в Excel — значень).

8.4.1. Діаграма Графік

Горизонтальна “нечислова” вісь під назвою вісь категорій (тобто вісь назв розділів) для діаграми Графік розробниками Excel традиційно призначалась для надання відповідної ознаки (імені, назви) числовим значенням, що зображуються на графіку. Категоріями виступають дати, назви, конкретні числа тощо, їх ще називають мітками. Фактично категорії є іменами рядів даних, розміщених уздовж кожного рядка (записів — мовою БД), одночасно назви категорій відображаються в легенді діаграми (рис. 58–59):

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Обладнання	234	567	876	600	907	987	999
Зарплата	45	65	77	59	87	88	93
Послуги	23	27	29	33	41	39	27
Інші витрати	14	19	18	17	16	19	19

Рис. 58

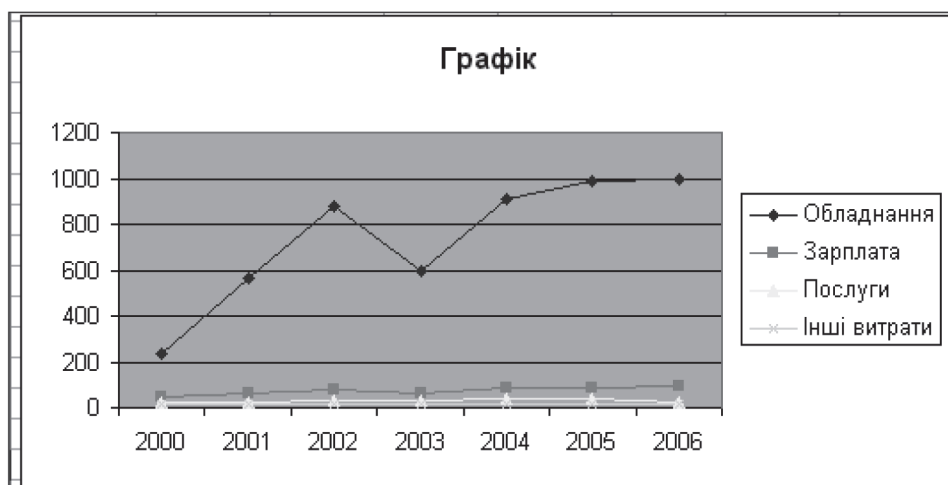


Рис. 59

Зазвичай стовпець категорій не має своєї назви, відповідно, вміст “лівої-верхньої” кутової клітинки має бути вільним (рис. 60):

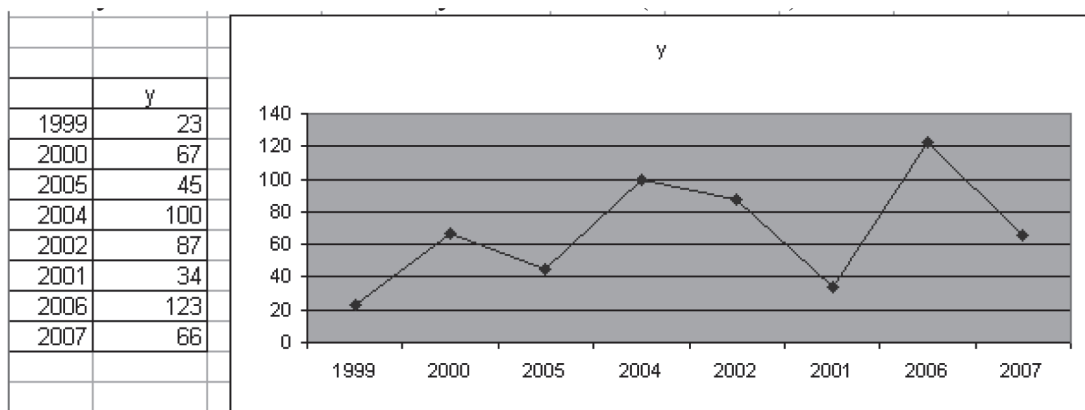


Рис. 60

Якщо цей стовпець відсутній, тоді категоріями рядів точок є їх порядкові номери (рис. 61):

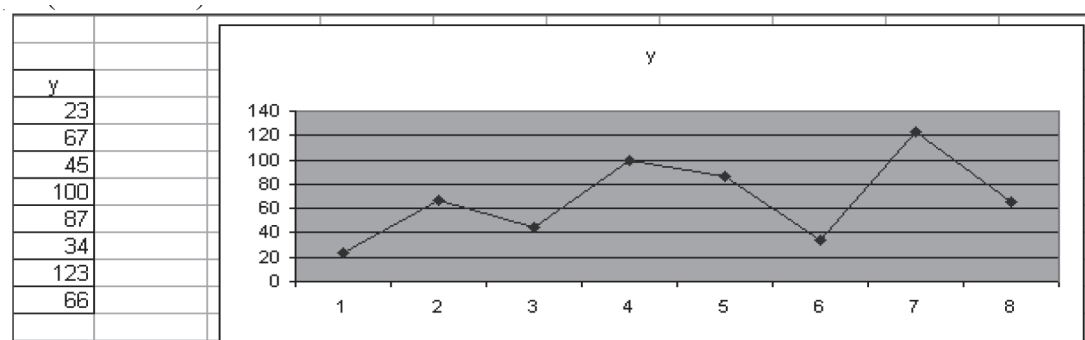


Рис. 61

Якщо ж категоріям надати осмислені значення (часові періоди, номери, назви), їх попередньо можна розташувати у порядку зростання чи спадання (за алфавітом чи числовим значенням) і графік відповідно на це відреагує, що є позитивним моментом, оскільки набір даних формується спонтанно (рис. 62–64):

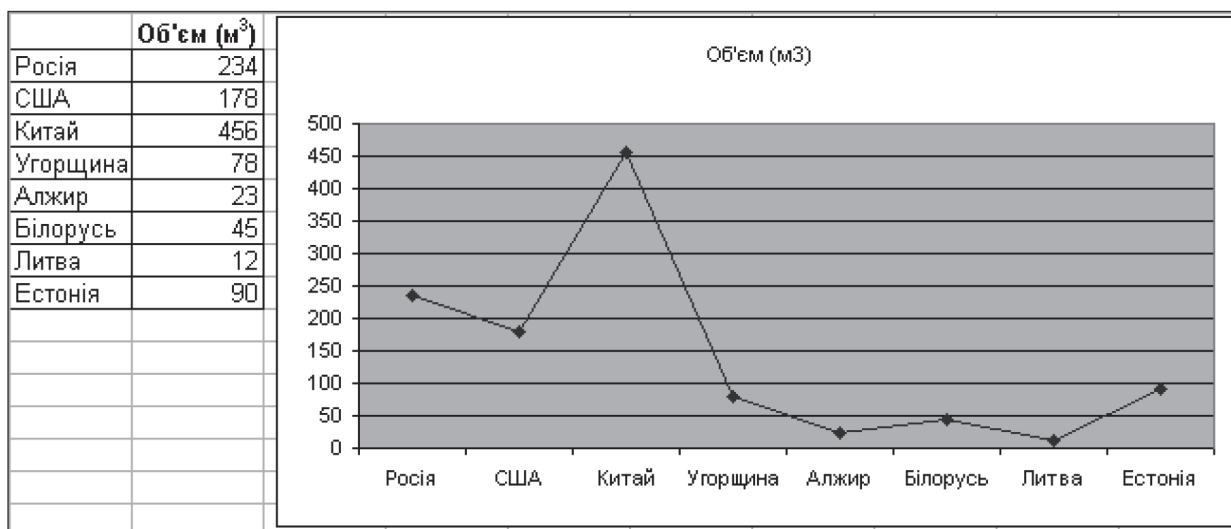


Рис. 62

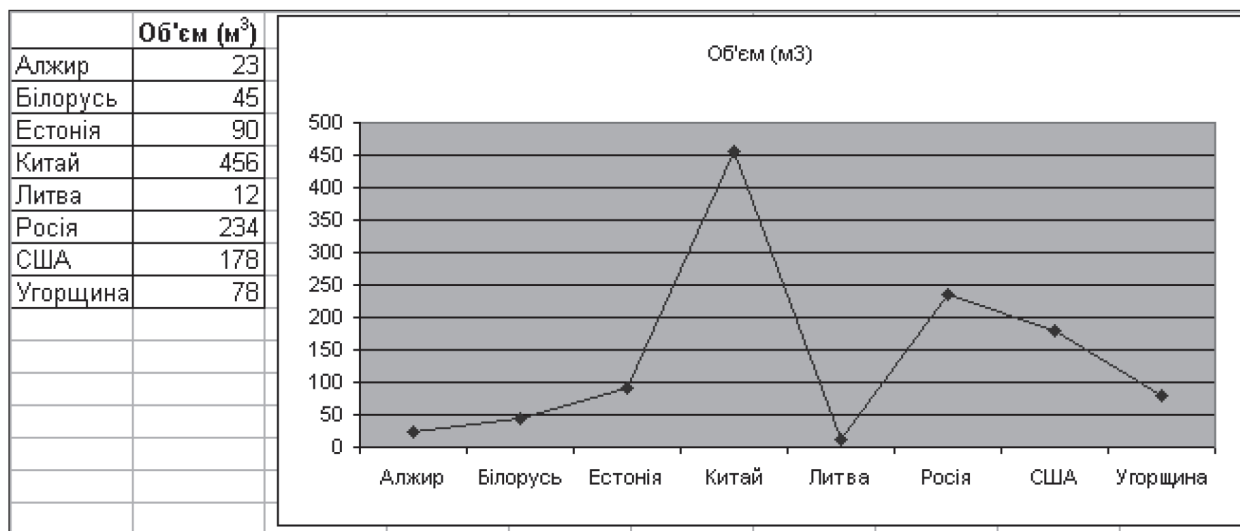


Рис. 63

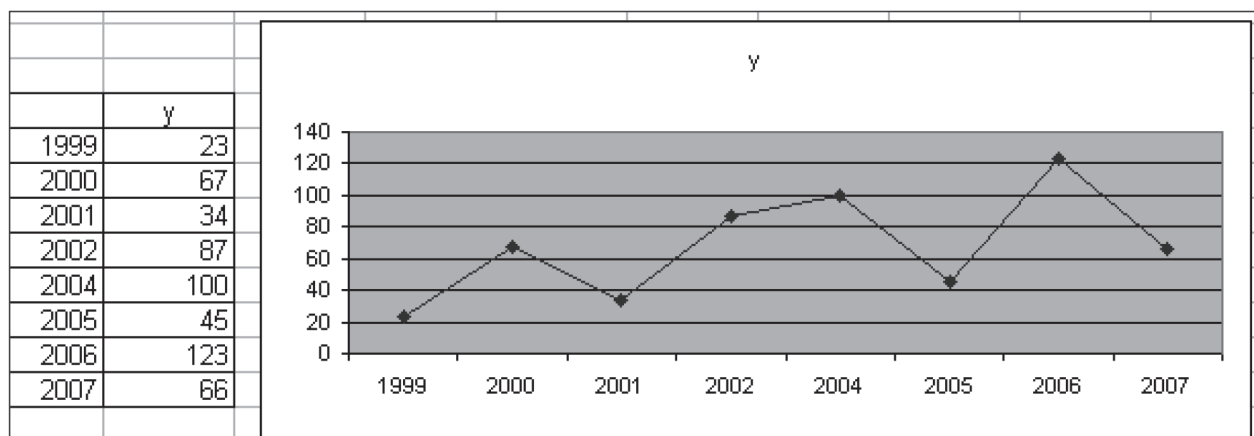


Рис. 64

Якщо ж мітками є числа, все одно вони використовуються саме як назви, а не як значення абсциси у складі координати точки (рис. 65):

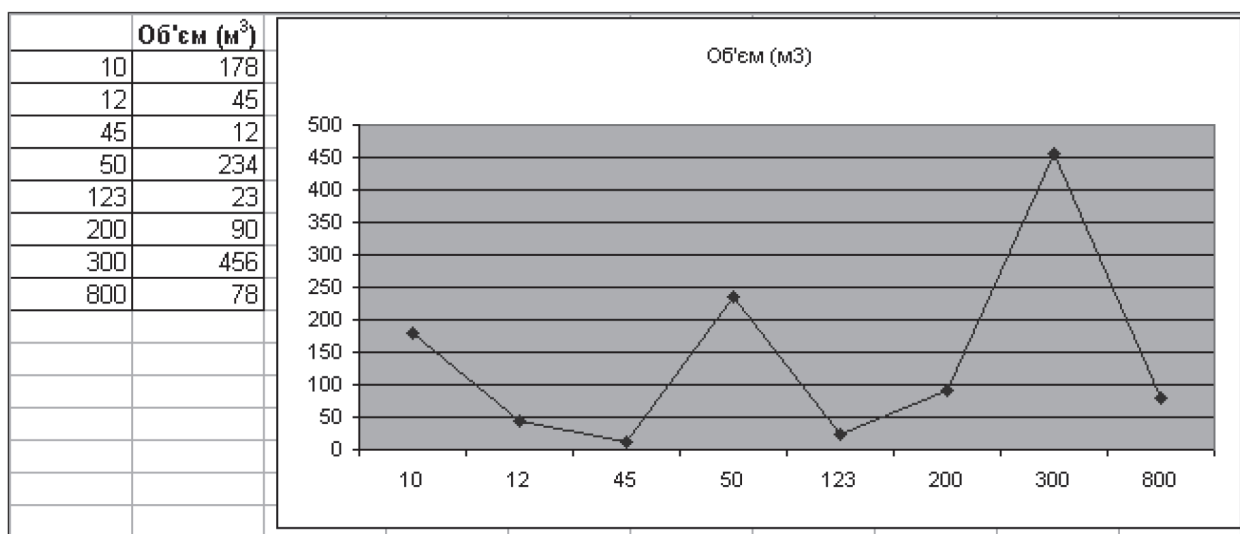


Рис. 65

Досить важливим є те, що зміна значень числових категорій **не призводить** до зміни позицій точок на графіку, тобто діаграму типу Графік можна

використовувати для побудови графіків математичних функцій на координатній площині, лише якщо числові значення категорій (вісь X) є розрахованими за певним масштабом числами-аргументами функції, значення якої обчислюються у наступному стовпці.

Вертикальна суто числова вісь під назвою “вісь значень” враховує значення відповідного стовпця з числами й відображає їх у відповідному масштабі. Ця вісь завжди розміщується зліва, незважаючи на знак числових категорій.

Майстер діаграм пропонує 7 видів діаграм типу Графік, де у них точки з’єднані лініями (рис. 66).



Рис. 66

Приклад: побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$, $x \in [0; 5]$, $n = 30$ у вигляді діаграми типу Графік.

Порядок роботи:

- створити таблицю початкових даних для розміщення значень: $x_{\min}$, $x_{\max}$, n , h_x , a , b , c , обчислити значення h_x ;
- заголовок для стовпця аргументів не створювати, треба лише сформувати стовпець значень аргументів x_i , для цього перше значення $x_0 = x_{\min}$ задати зв’язуванням, усі інші значення обчислити рекурентно за формулою:

$$x_i \leftarrow x_{i-1} + h_x;$$

- ввести заголовок стовпця значень функції (“ $f(x)$ ” або інший) і обчислити значення функції y_i для кожного значення аргументу x_i , посилаючись до клітинок зі значеннями коефіцієнтів a , b , c як за константами (за абсолютною адресою)
- за бажанням можна пронумерувати рядки, зокрема, щоб упевнитися, що для n ділянок осі X формується $n + 1$ точка графіка;
- виділити обидва стовпці і побудувати графік функції.

Тепер, змінюючи значення початкових даних, будемо кожного разу отримувати різні діаграми, щоб провести дослідження заданої функції (див. рис. 67).

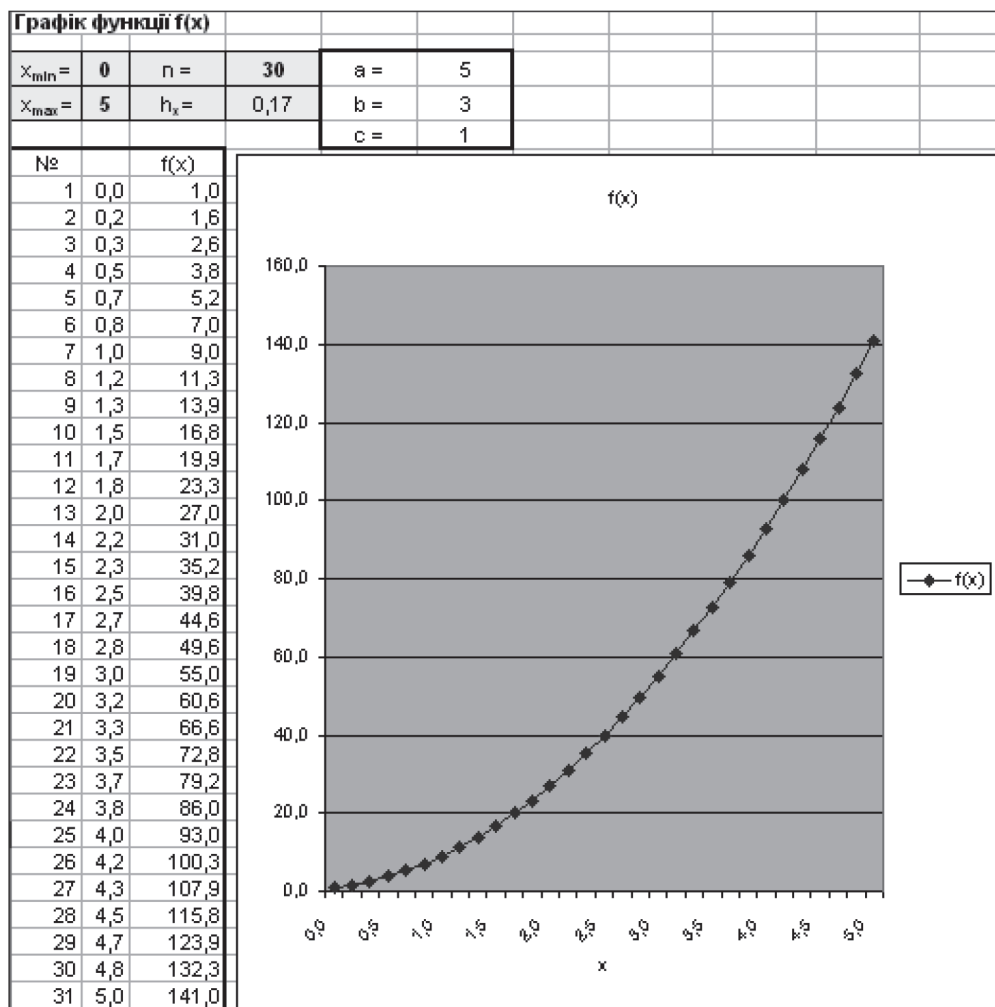


Рис. 67

8.4.2. Точкова діаграма

Діаграма типу Точкова має дві числові осі значень, які найкраще відповідають поняттям осі X (абсцис) та Y (ординат) прямокутної системи координат. Саме тому це ефективний і основний інструмент для наукової графіки та візуального прогнозування. Заголовок таблиці містить назви стовпців аргументу і функції, що робить зрозумілою звітну документацію.

За умовчанням значеннями осі X є числа у лівому стовпці з назвою, значеннями осі Y є числа у наступних стовпцях, відповідні ряди даних представляються точками певного кольору, назви стовпців зображуються в легенді.

Майстер діаграм пропонує 5 видів діаграми типу Точкова. Для задач статистичної обробки даних і прогнозування найбільш цінною є саме ця діаграма, що складається з виокремлених точок (див. рис. 68).

Тепер порівняймо діаграми Графік (див. рис. 69, а) і Точкову (див. рис. 69, б), застосовані для побудови графіка функції $y = ax^2 + bx + c$, $x \in [-5; 5]$, $n = 30$, $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, щоб визначити спільне і відмінне між ними.

Діаграма типу Точкова якнайкраще відповідає практиці побудови графіків функцій, маємо автоматично визначені масштаби осей, нею зручно користуватися, коли $x_i < 0$, бо ця діаграма розміщує вертикальну вісь відповідно

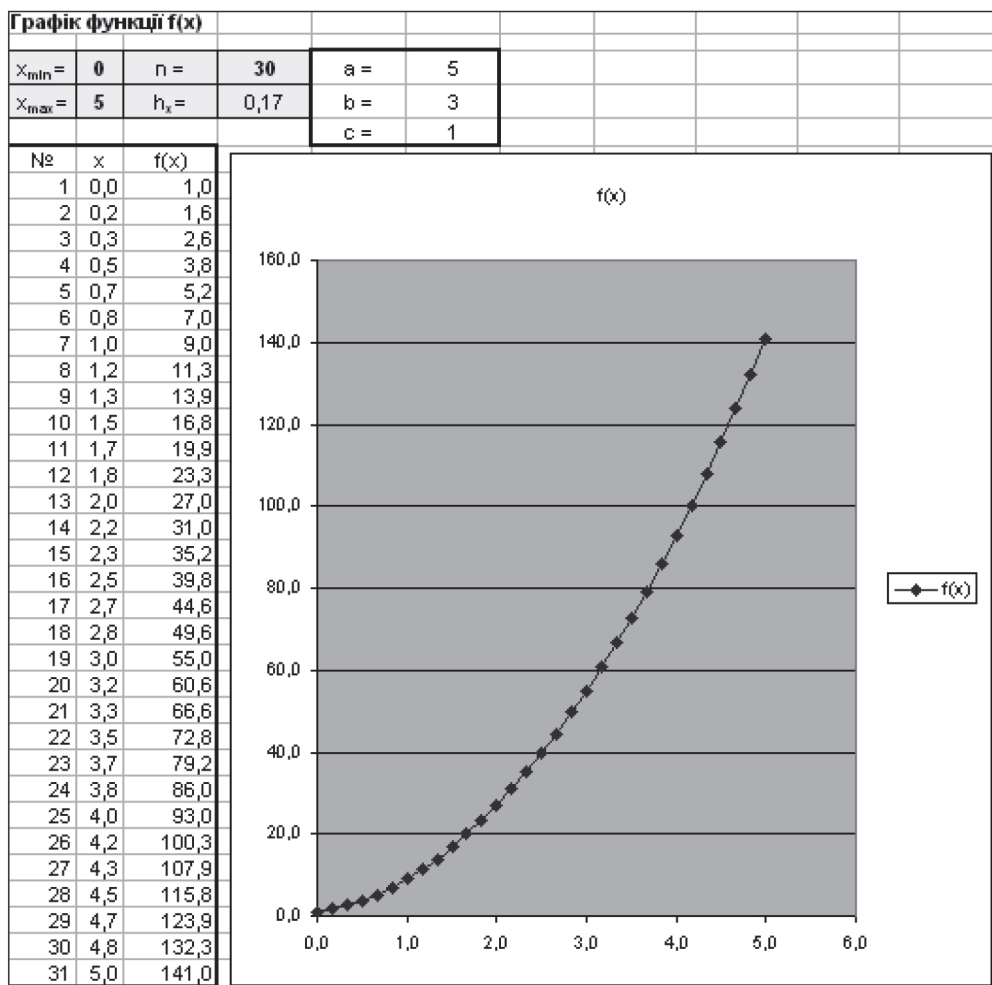
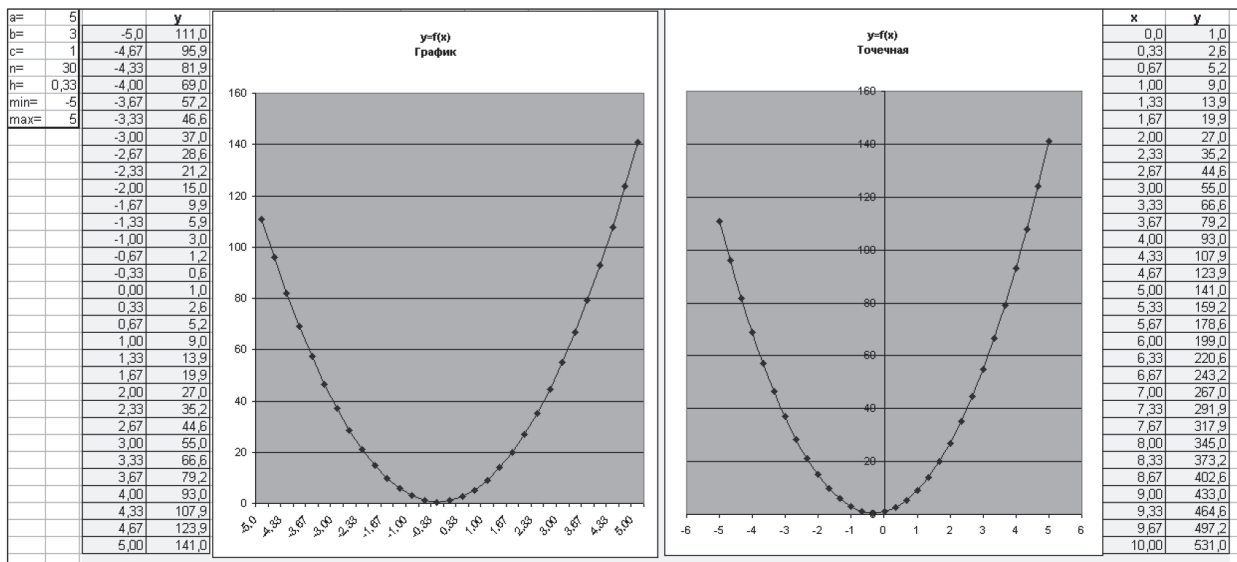


Рис. 68



а

Рис. 69

б

до звичної прямокутної системи координат з початком відліку у точці $(0, 0)$, де до того ж традиційно розмічені осі.

Це означає, що Точкова діаграма — універсальний інструмент для побудови графіків математичних функцій без будь-яких обмежень на ОЗФ, яким і будемо користуватися далі.

Формування графіка залежності

Результати експерименту представляють таблицю з набором координат точок, упорядкованих за номерами, спроба представити ці дані у вигляді графіків функцій $z = f_1(y)$, $s = f_2(y)$ дає неякісний результат (рис. 70):

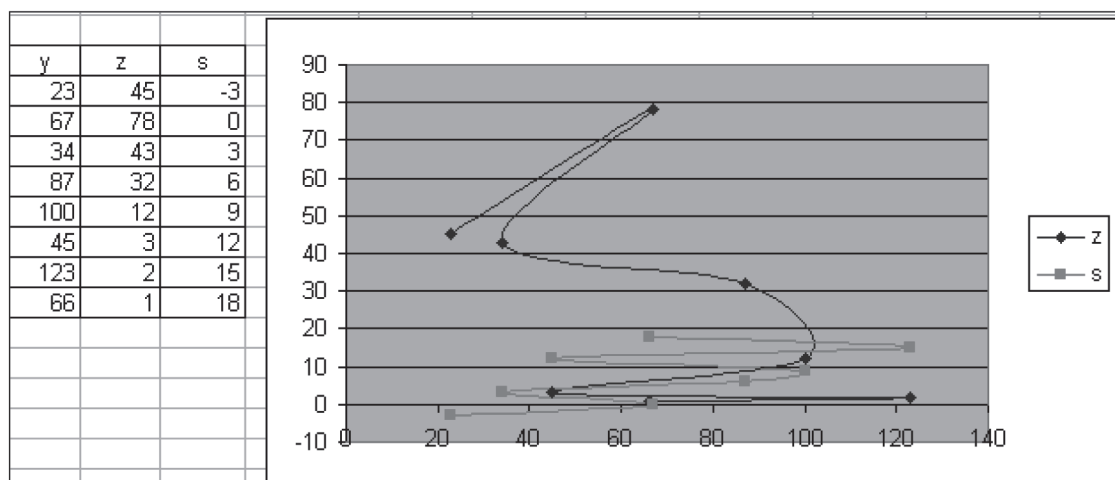


Рис. 70

Отже, щоб отримати якісний графік у вигляді залежності, значення першого стовпця (аргументів) треба упорядкувати по мірі зростання (команда Дані → Сортуювання). Таблиця з упорядкованими значеннями аргументів має вигляд (рис. 71):

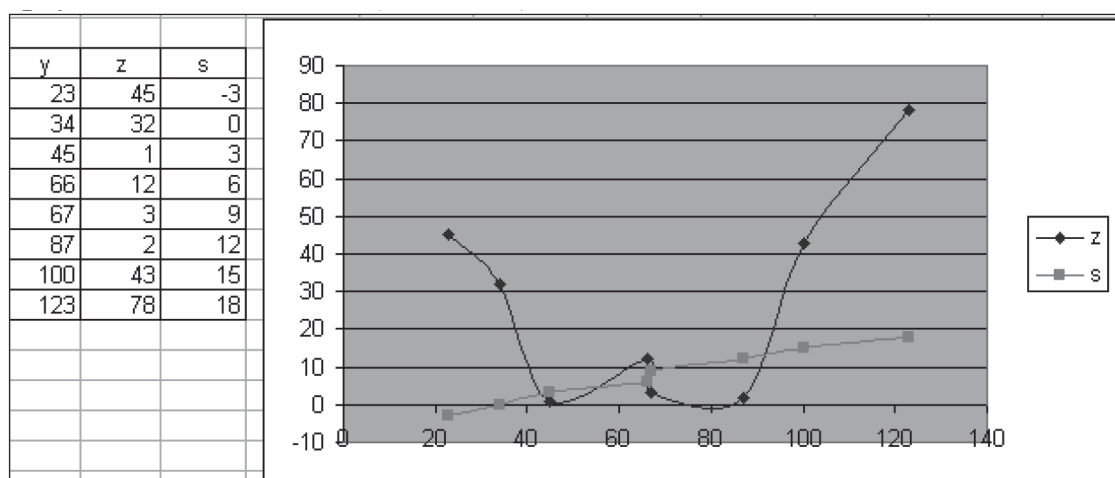


Рис. 71

Техніка побудови точкового графіка типу діаграми Точкова

Лінійна функція

Треба побудувати графік лінійної функції $f(x) = ax + b$, що має вигляд прямої лінії (звідси й назва функції “лінійна”), ОВФ: $x \in [0; +5]$, $n = 30$ (n — число ділянок розбиття ОВФ, тобто осі x), скориставшись засобом програми Майстер діаграм для побудови графіка функції — діаграмою Точкова.

Відомо, що лінійна функція $y = ax + b$ вважається “ідеальною”, бо визначена на усій числовій осі — її ОВФ $[-\infty, +\infty]$ і є нерозривною всюди у цій області.

Порядок роботи

Крок 1. Ввести початкові дані ($x_{\min}$, $x_{\max}$, n , a , b).

Крок 2. Обчислити крок зміни значення аргументу h_x за формулою:

$$h_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}, \text{ у прикладі } h_x = \frac{5 - 0}{30} = \frac{5}{30} = 0,167.$$

Крок 3. Розмістити в окремій ділянці табличного документа значення n , $x_{\min}$, $x_{\max}$ і h_x , a , b . Сформувати “шапку” документа, набравши назви стовпців таблиці: №, x , $f(x)$ (рис. 72, 73).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Графік функції f(x)						
2							
3	$x_{\min} =$	0	$n =$	30	$a =$	5	
4	$x_{\max} =$	5	$h_x =$	0,167	$b =$	3	
5							
6	№	x	f(x)				
7	1	0,0	3,0				
8	2	0,2	3,8				
9	3	0,3	4,7				
10	4	0,5	5,5				
11	5	0,7	6,3				
12	6	0,8	7,2				
13	7	1,0	8,0				
14	8	1,2	8,8				
15	9	1,3	9,7				
16	10	1,5	10,5				
17	11	1,7	11,3				
18	12	1,8	12,2				
19	13	2,0	13,0				
20	14	2,2	13,8				
21	15	2,3	14,7				
22	16	2,5	15,5				
23	17	2,7	16,3				
24	18	2,8	17,2				
25	19	3,0	18,0				
26	20	3,2	18,8				
27	21	3,3	19,7				
28	22	3,5	20,5				
29	23	3,7	21,3				
30	24	3,8	22,2				
31	25	4,0	23,0				
32	26	4,2	23,8				
33	27	4,3	24,7				
34	28	4,5	25,5				
35	29	4,7	26,3				
36	30	4,8	27,2				
37	31	5,0	28,0				

Рис. 72

Графік функції f(x)					
$x_{\min} =$	0	$n =$	30	$a =$	5
$x_{\max} =$	5	$h_x =$	0,167	$b =$	3
№	x	f(x)			

Рис. 73

Крок 4. Сформувати стовпець X (значень аргументу x), для цього: у першу клітинку (наприклад, B7) передати значення $x_{\min}$ зв'язуванням; у наступній клітинці (B8) задати формулу = B7 + \$D\$4 (в D4 визначено значення кроку h_x) і чорним хрестиком протягнути її по стовпцю (ця процедура називається автозаповненням), аж поки буде досягнуте значення $x_{\max}$. При бажанні можна пронумерувати таблицю.

Крок 5. Сформувати стовпець Y (значень функції y), для цього треба про-табулювати задану функцію – у першу клітинку стовпця $f(x)$ з адресою C7 ввести формулу $= \$F\$3*\$B7+\$F\$4$ і протягнути цю формулу по стовпцю, числа відформувати за розрядністю (приміром, один знак після коми), та-блиця готова.

Крок 6. Побудувати і оформити діаграму, для цього: виділити всю табли-цю (разом із заголовками стовпців), натиснути на кнопку Майстер діаграм і за 4 кроки побудувати діаграму, визначивши: тип діаграми Точкова, вид – Точкова діаграма зі значеннями, з'єднаними лініями, що згладжують.

Крок 7. У межах табличного документа треба компактно розмістити таб-личну і графічну інформацію, щоб графік вийшов виразним, рекомендується замінити стандартну сіру заливку білою і дещо змінити форму вікна діагра-ми, клавішею <Print Screen> “захопити” вміст табличного документа Excel, вставити його у звітний текстовий документ Word, обрізкою видалити зайві деталі, щоб мати приблизно такий кінцевий результат (рис. 74):

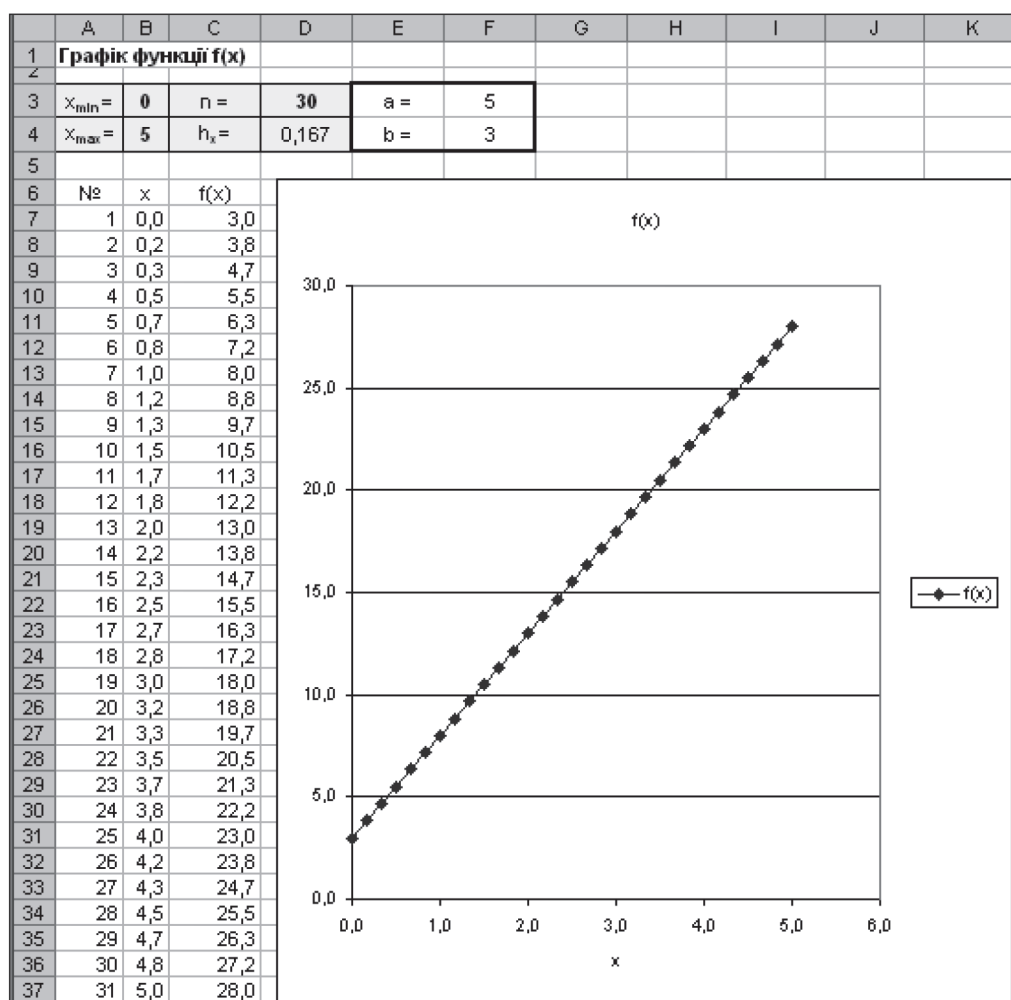
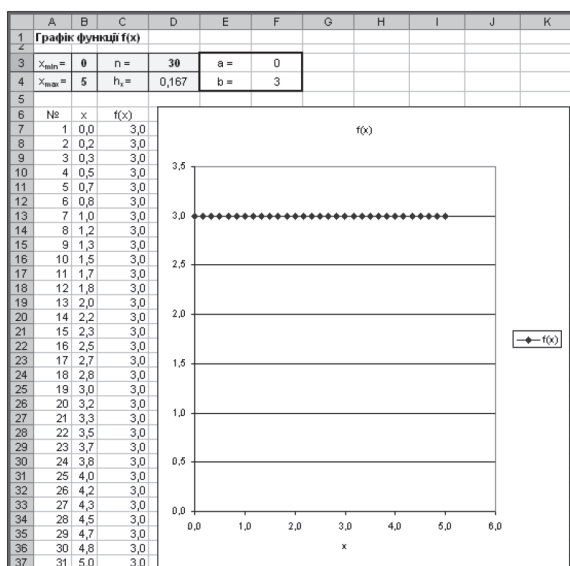


Рис. 74

Тож маємо ефективний аналітичний засіб, такий собі “осцилограф” — змі-нюючи початкові дані (a , b , $x_{\min}$, $x_{\max}$, n), в електронній таблиці автоматич-но будемо отримувати відповідні графіки з метою дослідження визначеної функції.

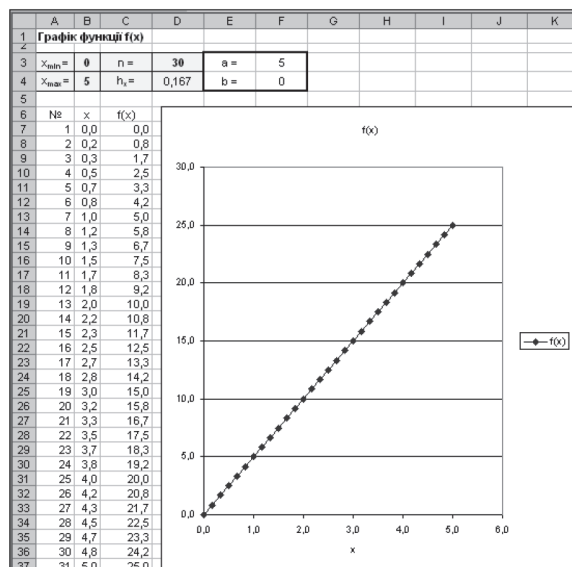
Наприклад, нас цікавить графік лінійної функції при:

- $a = 0, b \neq 0$ (функція $f(x) = b$, не залежить від x) (рис. 75, а);
- $a > 0, b = 0$ (функція прямої пропорційності $f(x) = ax$) (рис. 75, б);
- $a < 0, b = 0$ (спадająca функція $f(x) = -ax$) (рис. 75, в);
- $a = 0, b = 0$ (функція $f(x) = 0$, її графік — вісь абсцис) (рис. 75, г).



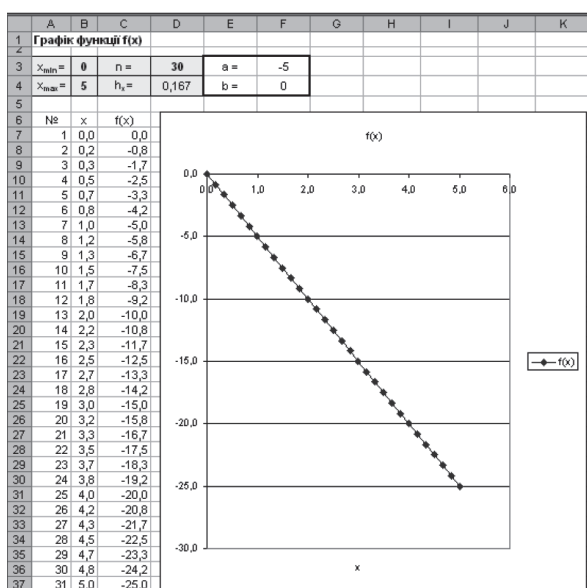
$a = 0, b = 20$

а



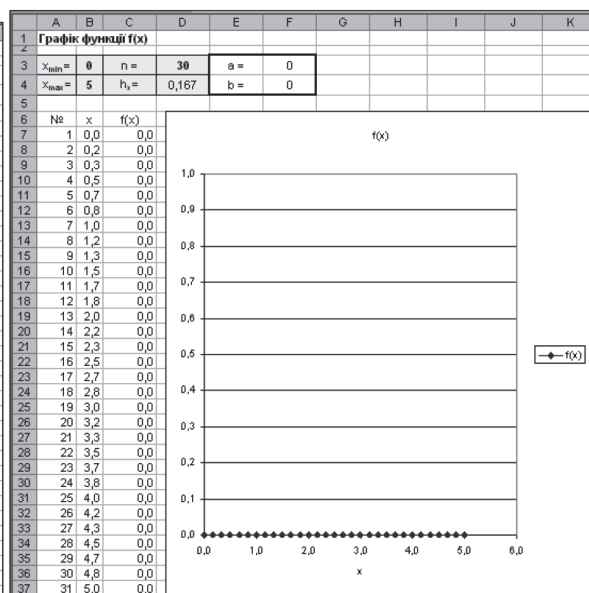
$a > 0, b = 0$

б



$a < 0, b = 0$

в



$a = 0, b = 0$

г

Рис. 75

Обернена функція

На рис. 75, б побудовано графік функції, оберненої до заданої функції $f(x) = ax + b$, де аргумент і функція поміняли свої місця, тепер це функція

$F(x) = \frac{f(x) - b}{a}$, аргументами якої є визначені за формулою $f(x) = ax + b$ значення $f(x)$.

- На відміну існування прямої функції $f(x) = ax + b$ усюди на числовій осі x функція $F(x)$ є невизначеною при $a = 0$, тобто маємо невизначеність $F(x) = \frac{0}{0}$ (рис. 76).

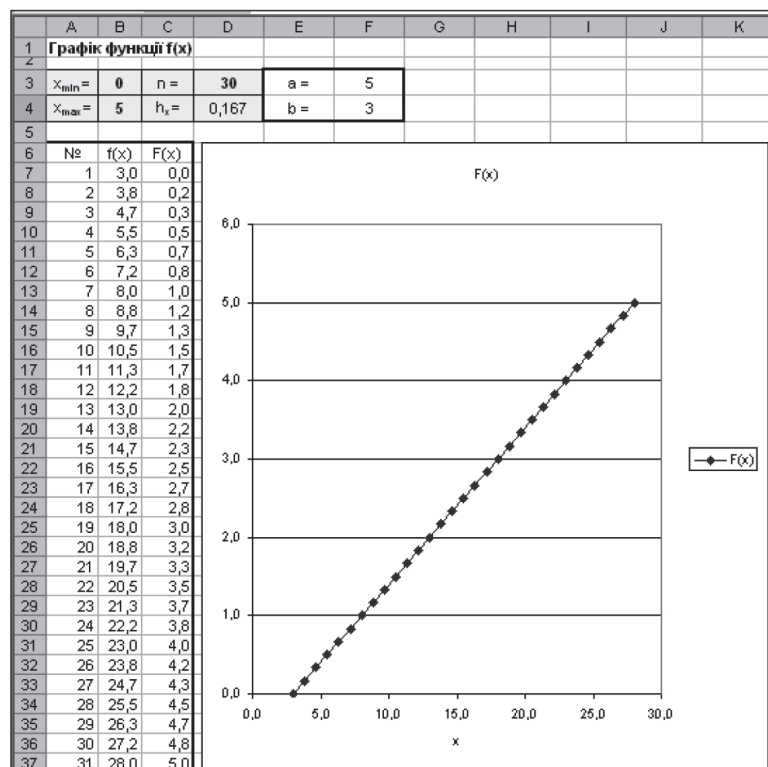


Рис. 76

8.5. Нелінійна функція

1. Треба побудувати графік функції $f(x) = \sin(x)$ (див. рис. 77) — це синусоїда, ОВФ — $x \in [0; 2\pi]$, число ділянок $n = 30$. Відомо, що ця тригонометрична функція “ідеальна”, бо визначена на усій числовій осі — її ОЗФ $[-\infty, +\infty]$. В Excel число π задають функцією $\pi()$.

Тепер, змінюючи початкові дані ($x_{\max}$, n) автоматично будемо отримувати відповідні графіки: при $x_{\max} = 12\pi$ (рис. 78, а), при $n = 100$ (рис. 78, б).

2. Побудувати графіки двох функцій: $f(x) = \sin(x)$ та $F(x) = \cos(x)$, $x \in [0; 2\pi]$, $n = 30$. Додатково треба створити стовпець $F(x)$ і заповнити його значеннями функції $F(x) = \cos(x)$, далі виділити всю таблицю з трьох стовпців і побудувати два графіки в одній системі координат (див. рис. 79).

3. Побудувати графік функції: $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \in [0; 2\pi]$, $h_x = \frac{\pi}{16}$.

В Excel для обчислення тангенсу кута є функція $\operatorname{TAN}(x)$. Відомо, що ця функція невизначена при $\cos(x) = 0$ (ділення на нуль), на графіку $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ видно, що косинус перетинає вісь x двічі при кутах $x = \frac{\pi}{2}$ та $x = \frac{3\pi}{2}$, саме у цих точках функція $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ терпить розрив.

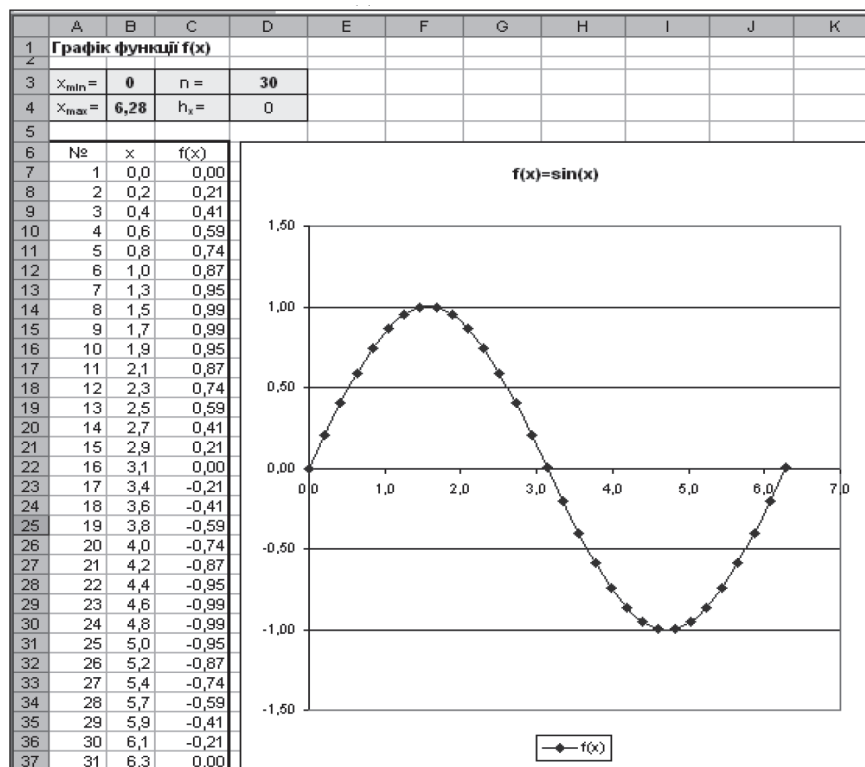


Рис. 77

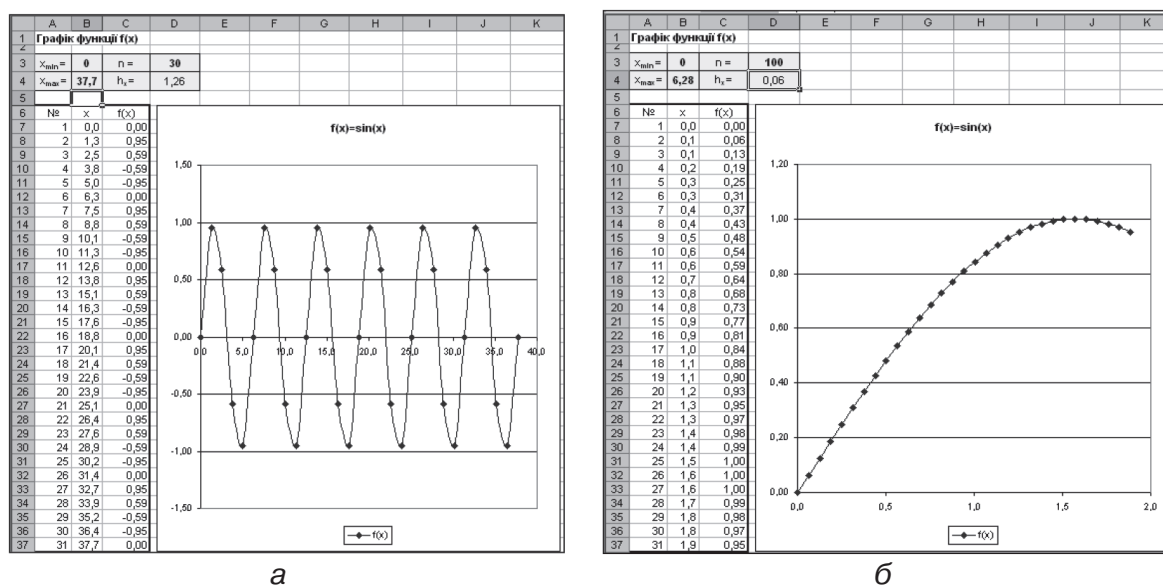


Рис. 78

“Прямий” спосіб

На рис. 80, а видно, що згідно з табличними обчисленнями двічі при значенні аргументу x , де $\cos(x)$ близький до нуля, значенням тангенса є астрономічне число, на тлі якого всі інші значення близькі до нуля. Отже, цей спосіб побудови графіка такої функції некоректний. Виправити положення можна видаленням цих астрономічних чисел (рис. 80, б), де видно дійсний характер даної функції.

Такий підхід не є коректним, адже можливі значення аргументу x , коли функція “перескакує” через критичні положення. При цьому таблиця виво-

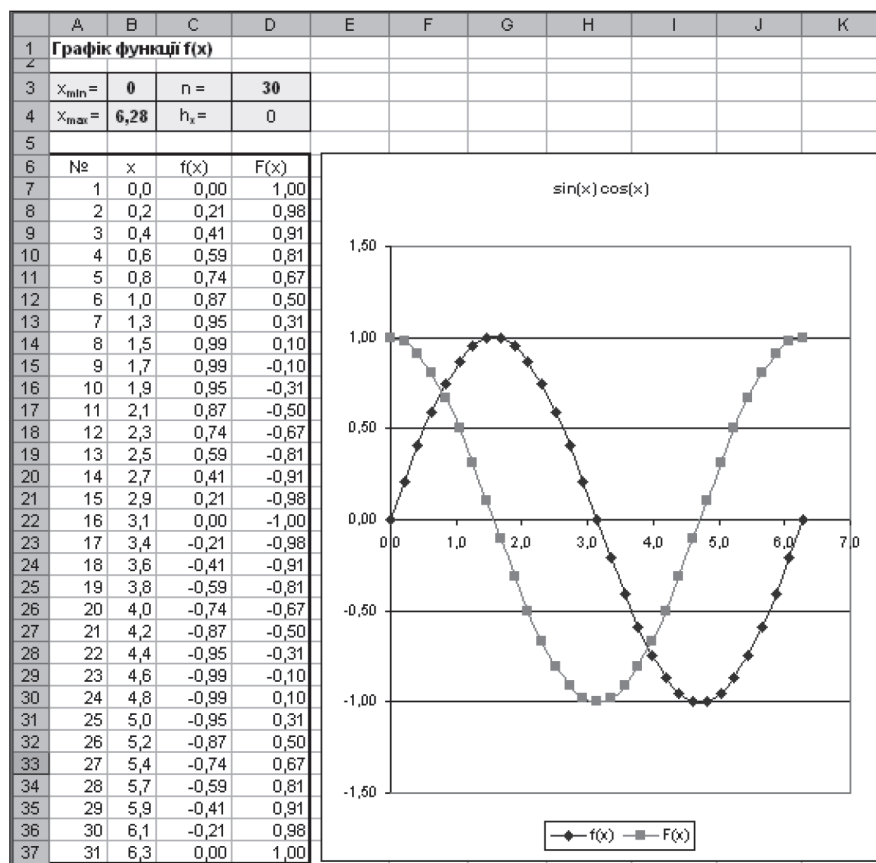
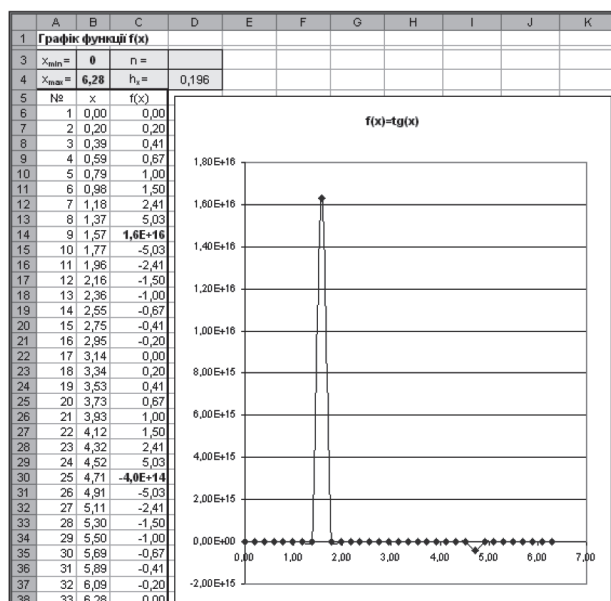


Рис. 79

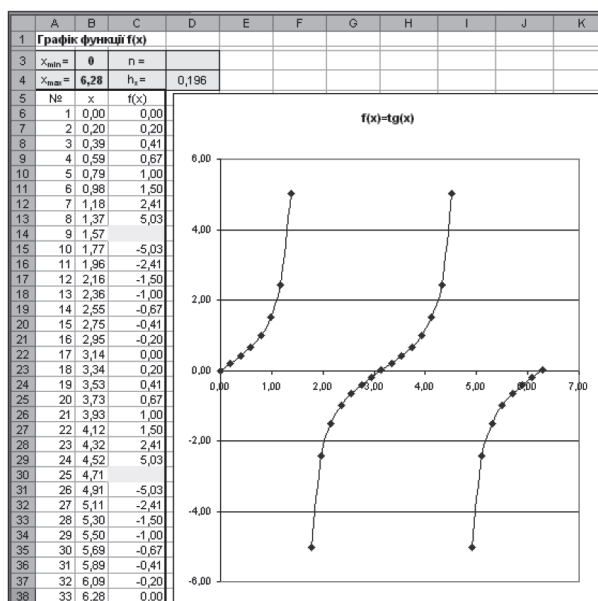
дить повідомлення про помилки, відповідний графік має “пристойний” вигляд, чим вводить в оману тих, хто не обізнаний зі специфікою відповідної функції. На рис. 81, в наш такий “шалений” за своєю природою тангенс веде себе “тихо”, але “підступно”, де його значення не перевищують 15.

Цей приклад свідомо підводить дослідника до думки щодо уважного попереднього аналізу функції, графік якої треба побудувати. Це актуально і нижче показано коректний підхід до такої ситуації.

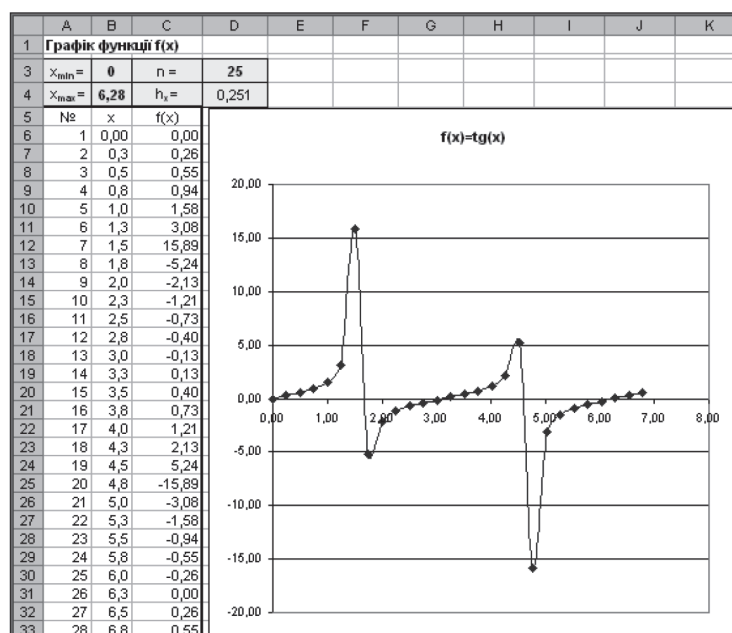


а

Рис. 80



б



В
Рис. 81

4. Побудувати графік функції оберненої пропорційності $f(x) = \frac{a}{x} + b$ для $x \in [-1; +5]$, $n = 30$. Ця функція “реальна”, на відміну від “ідеальної”, вона визначена не на усій числовій осі — при дуже малих (за модулем) значеннях аргументу x значення функції $f(x)$ прямує до нескінченності, а при $x = 0$ значення цієї функції взагалі не визначене (ділення на нуль).

“Простий” спосіб

Цей “простий” (можна було б сказати — “тупий”) спосіб передбачає побудову графіка функції, задавши її у стовпці “ $f(x)$ ” відповідною формулою. Ним користуються ті, хто не хоче займатися аналізом математичної функції й ігнорує факт ділення на нуль. Відповідно буде отримано графік (рис. 82, а), де таблиця виводить аварійне повідомлення #ДІЛ/0! (“Ділення на 0”). Видаливши це повідомлення, отримаємо коректний графік розривної функції, рис. 82, б.

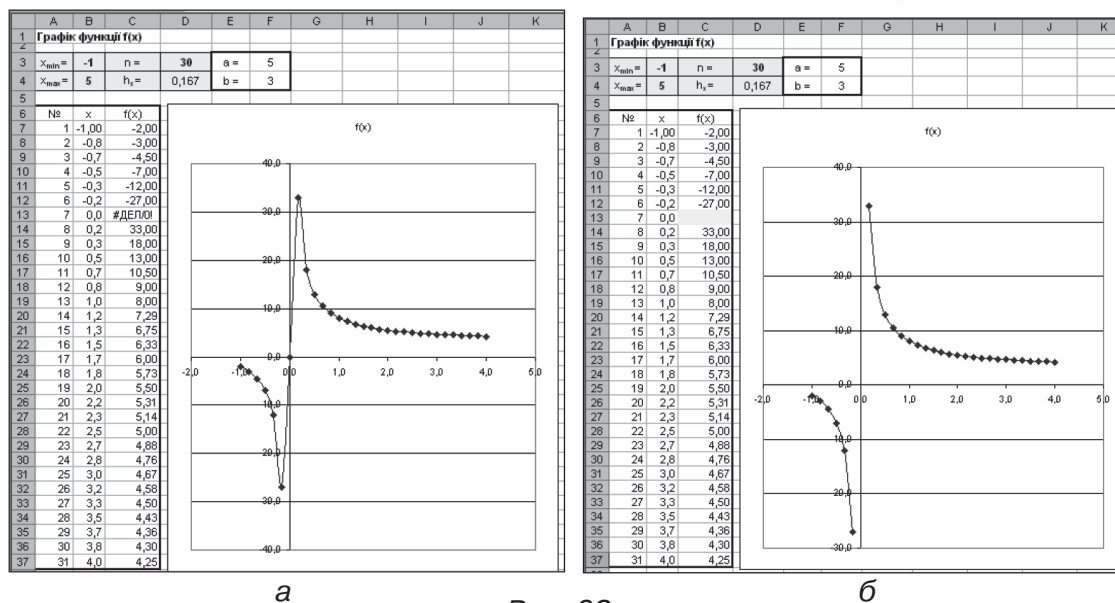


Рис. 82

При іншому значенні кроку (скажімо, при $n = 27$) таблиця зробить вигляд, що все ОК!, маємо “пристойний” графік і можлива небезпека нівельована (рис. 82, в):

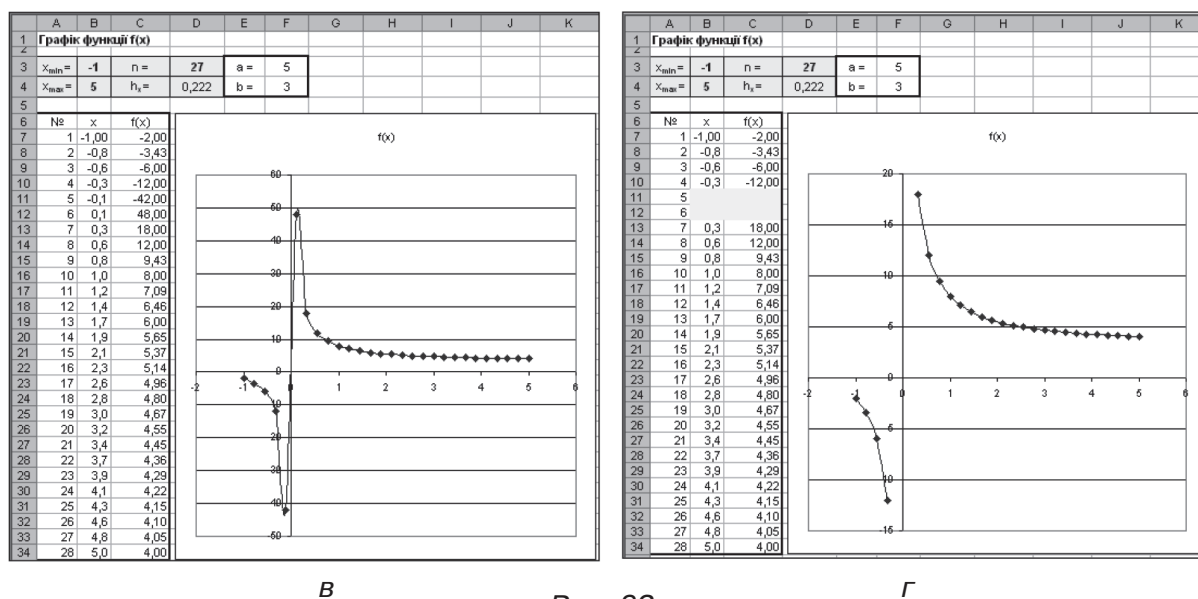


Рис. 82

“Зважений” спосіб

Цей грамотний спосіб (можна було б сказати — “розумний”) передбачає, як будувати графік, провести аналіз функції за стандартними правилами алгебри.

Ще у початковій школі наголошується, що при аналізі функцій і побудові їх графіків треба звертати увагу на “підводні камені” — це певні тригонометричні функції (типу тангенса), дробі та корені чи їх композиції, тобто детально аналізують область визначення функції, щоб упевнитись, де вона існує, а де ні. Адже “тупий” спосіб побудови графіка (без попереднього аналізу ОЗФ) може бути некоректним й навіть небезпечним, якщо на його основі приймають певне серйозне рішення, скажімо, конструюють якийсь механізм чи технологічний процес. Уявіть, що функція $f(x) = \frac{a}{x} + b$ описує силу матеріального потоку, струму чи тиску у певній схемі чи конструкції, відповідно, при значенні x близькому до 0 маємо імпульс практично з нескінченним значенням, який не витримає ніяка труба чи провідник!

Тож попередній аналіз функції перед побудовою її графіка є обов’язковим, бо ставить за мету зафіксувати й убезпечити певний принциповий випадок.

Так, ще зі школи відомо, що наведена вище функція $f(x) = \frac{a}{x} + b$ не існує (кажуть, “терпить розрив”), коли знаменник є нулем (при $x = 0$), тому її графік коректно представляється двома “гілками”, де розрив функції не має зображення. Знаючи, що при $x = 0$ функція терпить розрив, цей факт при побудові графіка можна реалізувати такими способами:

а) видаленням координат $(0; \#ДІЛ/0!)$ точки з аварійним повідомленням, якщо воно є в таблиці;

- б) видаленням координат пар сусідніх точок, де функція змінює знак (рис. 82, г), зі збереженням координат усіх інших точок (для цього формули в таблиці замінюють значеннями) або краще так, як описано в наступному пункті;
- в) розділенням заданої функції на дві самостійні “гілки”, що існують до і після точки розриву:

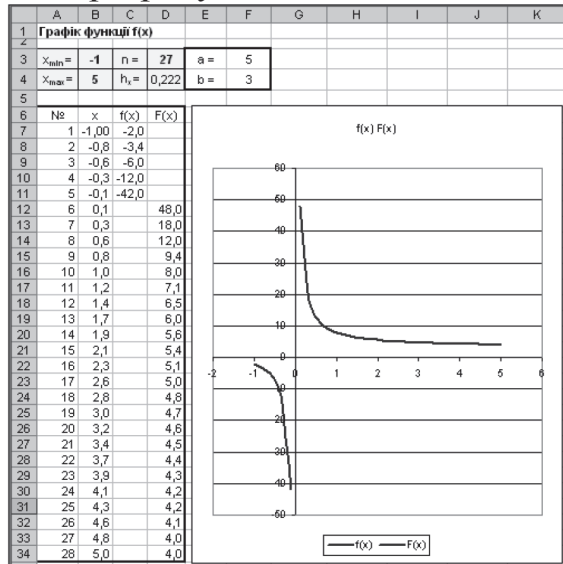


Рис. 83

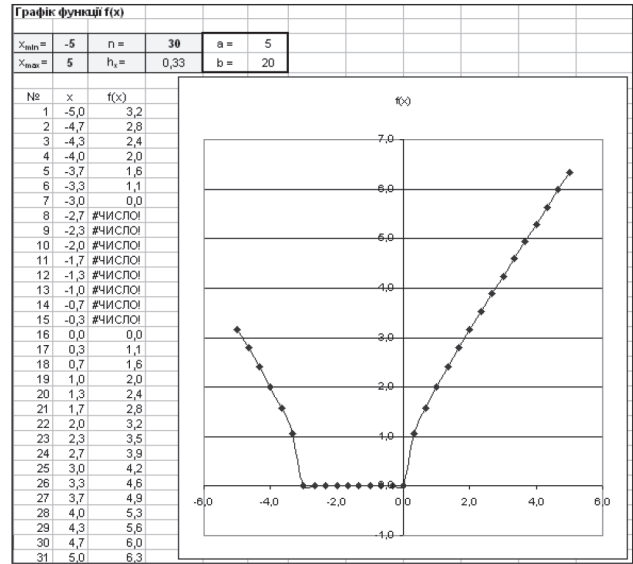


Рис. 84

5. Побудувати графік розривної функції $f(x) = \sqrt{x(x+3)}$ для $x \in [0; +5]$, $n = 30$ (рис. 83).

Якщо це реалізовано “прямим” способом, таблиця “кричить” аварійним повідомленням #ЧИСЛО! Це повідомлення свідчить про:

- а) недопустиме значення підкореневого виразу;
- б) ситуацію, коли числове значення виходить за межі допустимих в Excel “астрономічних” чисел від -10^{307} до $+10^{307}$ (рис. 84).

Графік на рис. 84 помилково свідчить про існування функції всюди на визначеному числовому проміжку.

Аналіз: ця функція визначена не на усій числовій осі, а лише в області, де підкореневий вираз невід’ємний: $x(x+3) \geq 0$, а саме:

- “мінус на мінус дає плюс”, $x \leq 0$ та $x+3 \leq 0$, $x \leq -3$, тобто, коли $x \leq -3$ або
- “плюс на плюс дає плюс”, $x \geq 0$ та $x+3 \geq 0$, $x \geq -3$, тобто, коли $x \geq 0$.

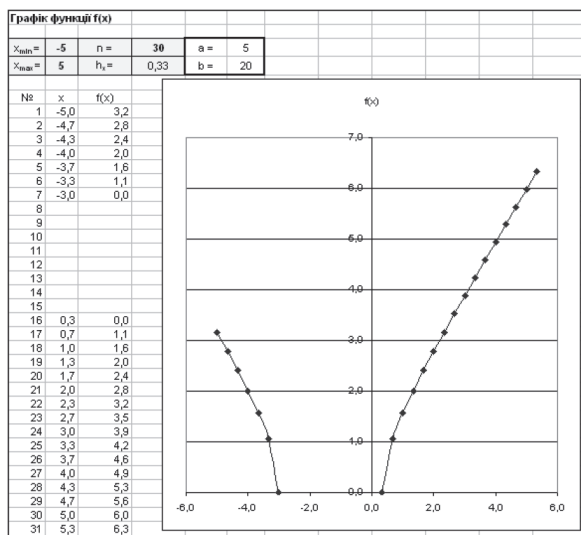
Отже, область визначення функції складається з двох ділянок: $[-\infty; -3]$ та $[0; \infty]$.

Можливі два способи побудови графіка з урахуванням визначених умов:

- одна функція (з вирізкою недопустимої області) (див. рис. 85, а);
- дві функції, задані на різних інтервалах, що реалізують задання цієї початкової функції кусково (див. рис. 85, б).

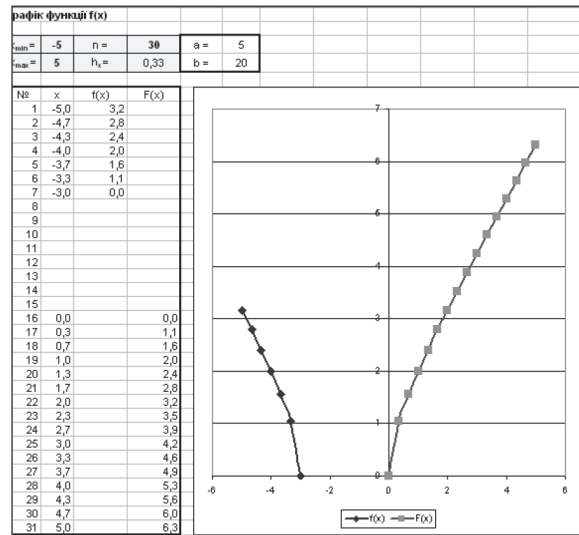
6. Побудувати графік розривної функції: $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x-3}}$ для $x \in [-5; +5]$, $n = 30$.

“Прямий” спосіб побудови графіка цієї функції (див. рис. 86, а) змусив таблицю “повідомляти” про наявність одночасно двох типів помилок, хоча



а

Рис. 85



б

графік “спокійно” на це реагує, замінюючи нулями неіснуючі значення кореня (#ЧИСЛО!) і пропускаючи ділення на нуль (при $x = 3$), здається — все “нормально”, функція існує всюди, її максимальне значення не перевищує 3!

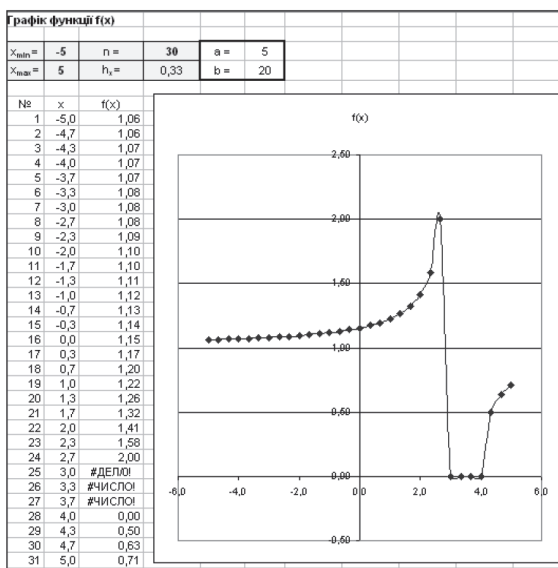
Аналіз: людині з середньою освітою є сумнівною “правильність” цього графіка. Вона робить аналіз існування функції, згідно з яким повинні задовольнятися такі умови:

- знаменник дробу ненульовий, якщо: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$;
- підкореневий вираз невід’ємний $\frac{x-4}{x-3} \geq 0$, якщо:
 - “плюс на плюс дає плюс”: $(x \geq 4)$ та $(x > 3)$, тобто, $x \geq 4$ або
 - “мінус на мінус дає плюс”: $(x \leq 4)$ та $(x < 3)$, тобто, $x < 3$.

Отже, ОВФ: $[-\infty; -3)$ та $[4; +\infty]$, відповідний графік має вигляд (рис. 86, б).

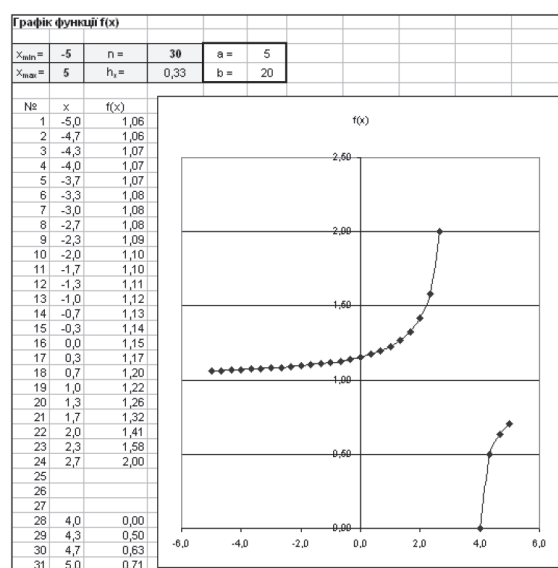
7. Побудувати графіки двох функцій на одній координатній площині:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)} \text{ та } \varphi(x) = \sqrt[3]{x^2(x-3)} \text{ для } x \in [-5; 5], n = 30 \text{ (див. рис. 87).}$$



а

Рис. 86



б

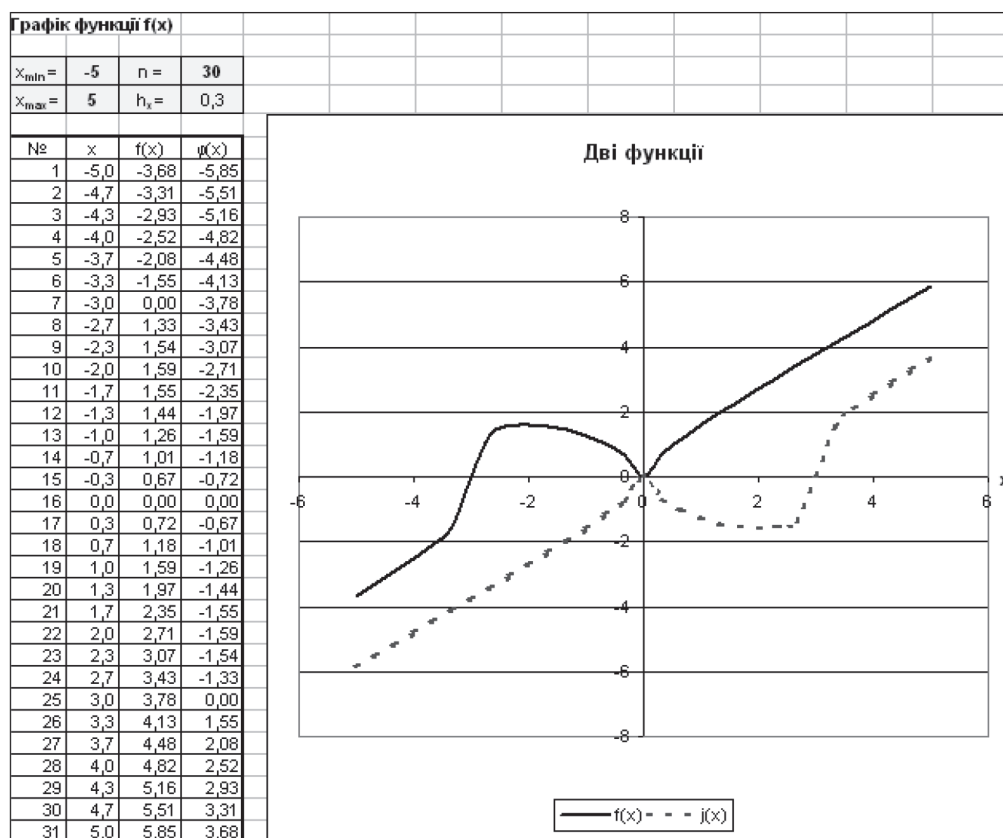


Рис. 87

8. Побудувати графік функції: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 5 \\ 12, & x = 5, \\ 1-x, & x > 5 \end{cases}, x \in [-10; +10], n = 30.$

При побудові цього графіка використовується функція Excel IF: у клітинці (C7) формула **=IF(B7<5;B7+1; IF(B7=5;12;1-B7))**, що реалізує алгоритм з розгалуженням (рис. 88):

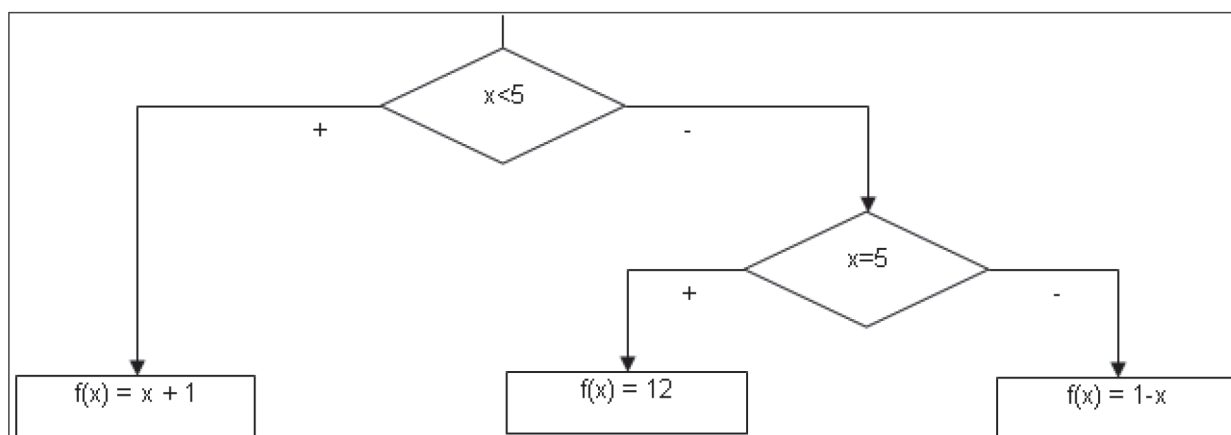


Рис. 88

Результат (див. рис. 89).

9. Побудувати графік функції $f(x, y) = 0$, заданої неявно рівнянням: $4y^2 + 5x^2 - 20 = 0$. Це, як відомо, опис лінії за назвою еліпс. Сформуємо явно (зліва — функція, справа — аргументи) виражену функцію у вигляді $y = f(x)$:

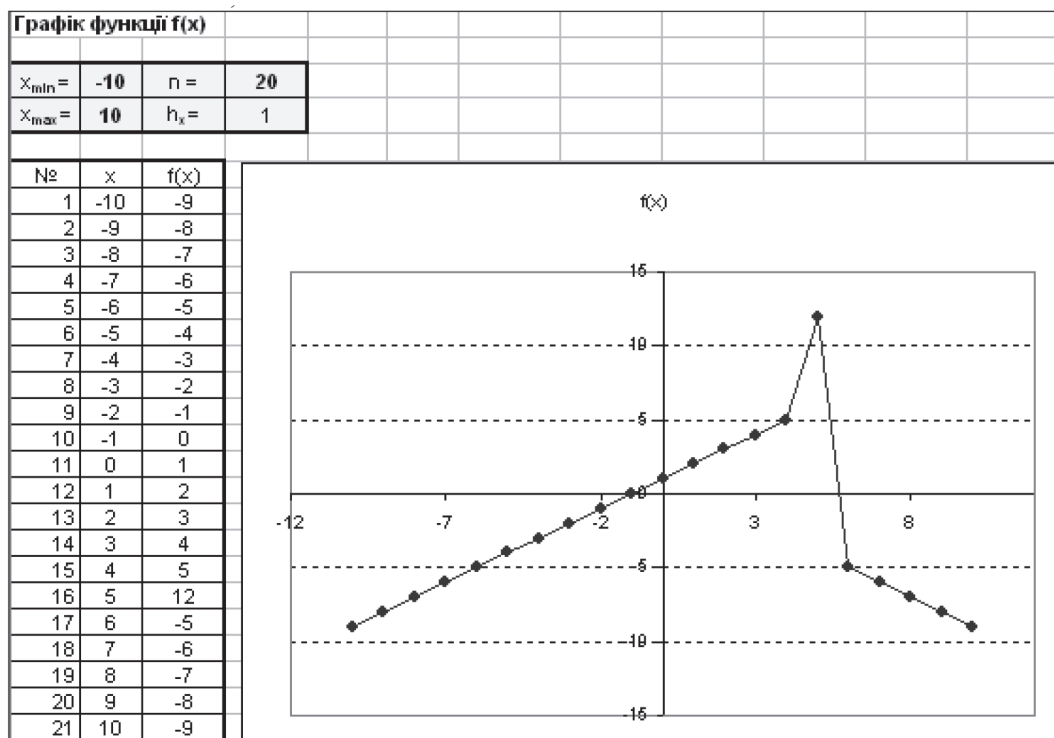


Рис. 89

$4y^2 = 20 - 5x^2 \Rightarrow y^2 = (20 - 5x^2)/4 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{(20 - 5x^2)}{4}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{20 - 5x^2}$. Маємо дві часткові функції, симетричні відносно осі x : $f_1(x) = +\frac{1}{2} \sqrt{20 - 5x^2}$, $f_2(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{20 - 5x^2}$, які існують при $20 \geq 5x^2$ або $5x^2 \leq 20 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq \pm 2$, тобто задана функція визначена на замкненому числовому проміжку $x \in [-2; 2]$.

Графіки цих двох часткових функцій, що складають задану, мають вигляд (рис. 90):

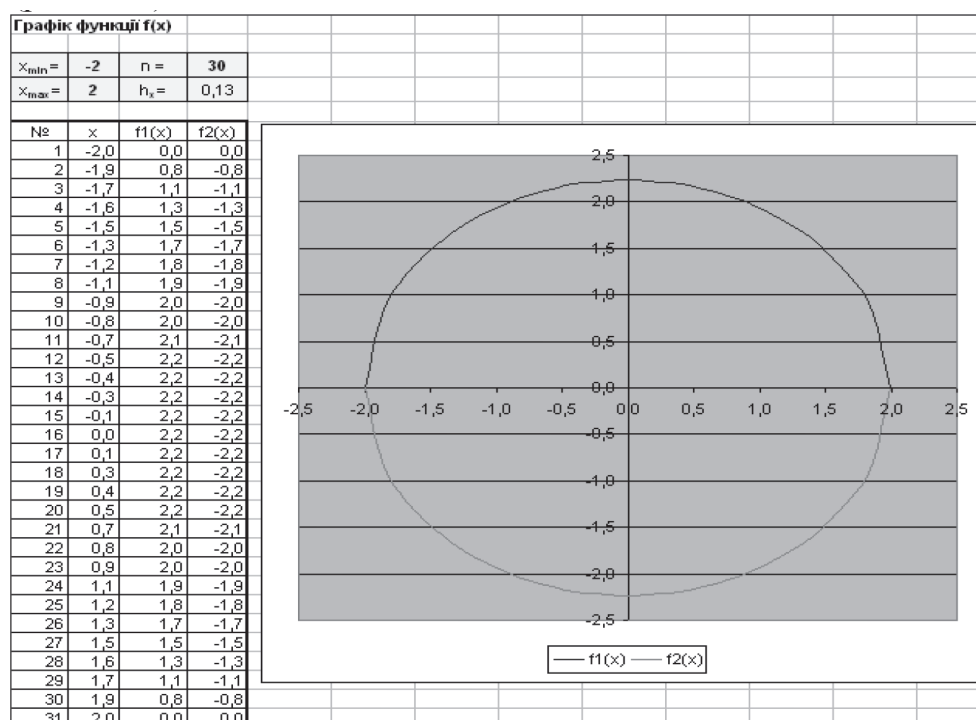


Рис. 90

10. Побудувати графік функції $f(x, y) = 0$, заданої неявно рівнянням $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, це, як відомо, опис лінії за назвою гіпербола. Сформуємо явно виражену функцію у вигляді $y = f(x)$:

$$\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} - 1 \Rightarrow y^2 = 9 \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right) \Rightarrow y = \pm 3 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} - 1 \right)}.$$

В Ексел ця функція має вигляд: $\pm(3/2)*\text{корінь}(x^2 - 4)$. Маємо дві часткові функції, симетричні відносно осі X: $f_1(x) = +1,5*\text{корінь}(x^2 - 4)$, $f_2(x) = -1,5*\text{корінь}(x^2 - 4)$, які існують при $x^2 - 4 \geq 0$, відповідно, $x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq \sqrt{4} \Rightarrow \Rightarrow \pm x \geq 2 \Rightarrow x \geq \pm 2$ або $x \leq -2$, тобто задана функція визначена на розривному числовому проміжку $x \in [-\infty; -2]$ та $[2; \infty]$.

Графіки цих часткових функцій, що складають задану, мають такий вигляд (рис. 91):

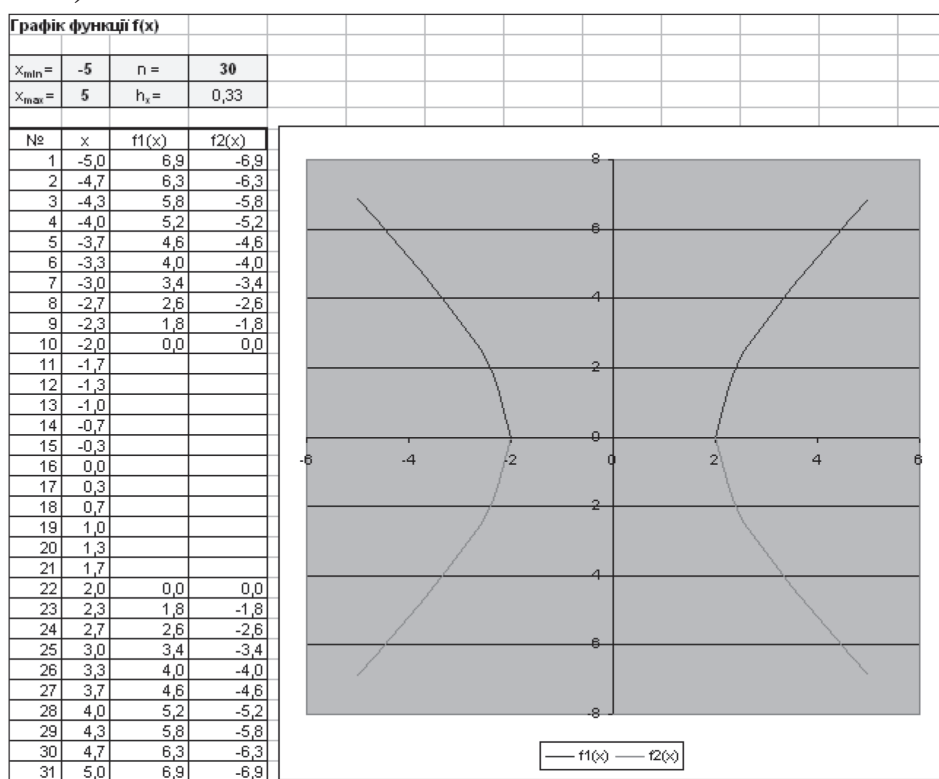


Рис. 91

11. Побудувати і дослідити графік квадратичної функції:

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Квадратична функція є прикладом опуклої/угнутої функції, що має явно виражений екстремум (мінімум/максимум), цільові функції саме такого типу утворюють предмет опуклого та квадратичного програмування у складі математичного програмування. Одночасно квадратична функція є поліномом 2-го степеню, оскільки відомо, що в математичній статистиці поліноміальна апроксимація досить поширена.

Графіки квадратичної функції за умов: а) $b = 0, c = 0, a > 0, y = ax^2$.

Графік цієї функції розміщується у верхній напівплощині, проходить через початок системи координат, симетричний відносно осі ординат, на про-

міжку $[-\infty; 0]$ функція спадає, а на проміжку $[0; \infty]$ зростає, мінімальне значення дорівнює 0, максимального значення функція не має (рис. 92):

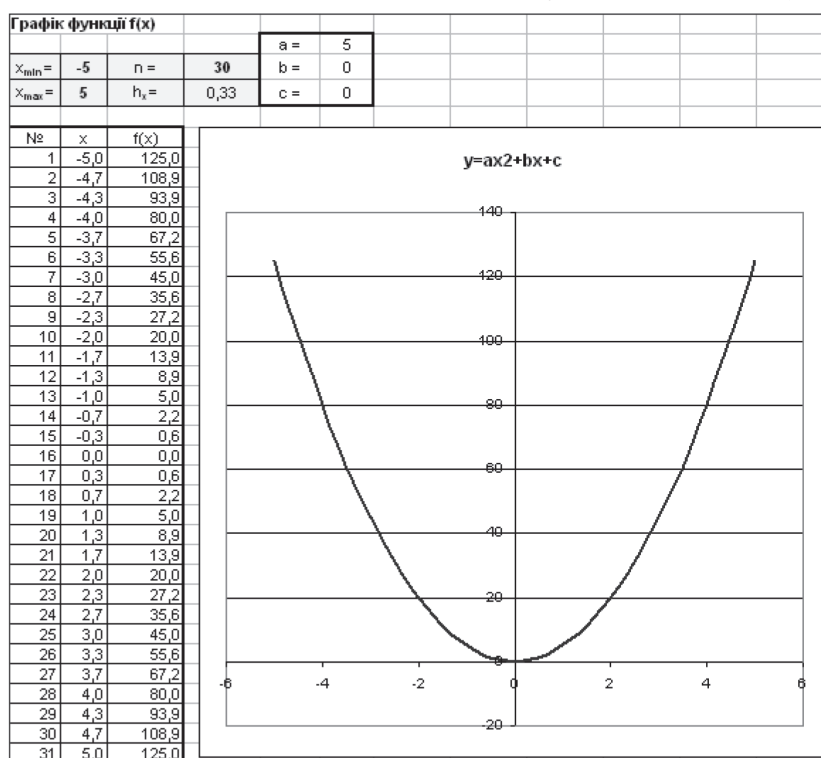


Рис. 92

б) $b = 0, c = 0, a < 0$, функція $y = -ax^2$.

Графік цієї функції розміщується у нижній напівплощині, проходить через початок системи координат, симетричний відносно осі ординат, на проміжку $[-\infty; 0]$ функція зростає, а на проміжку $[0; \infty]$ спадає, максимального значення дорівнює 0, мінімального значення функція не має (рис. 93):

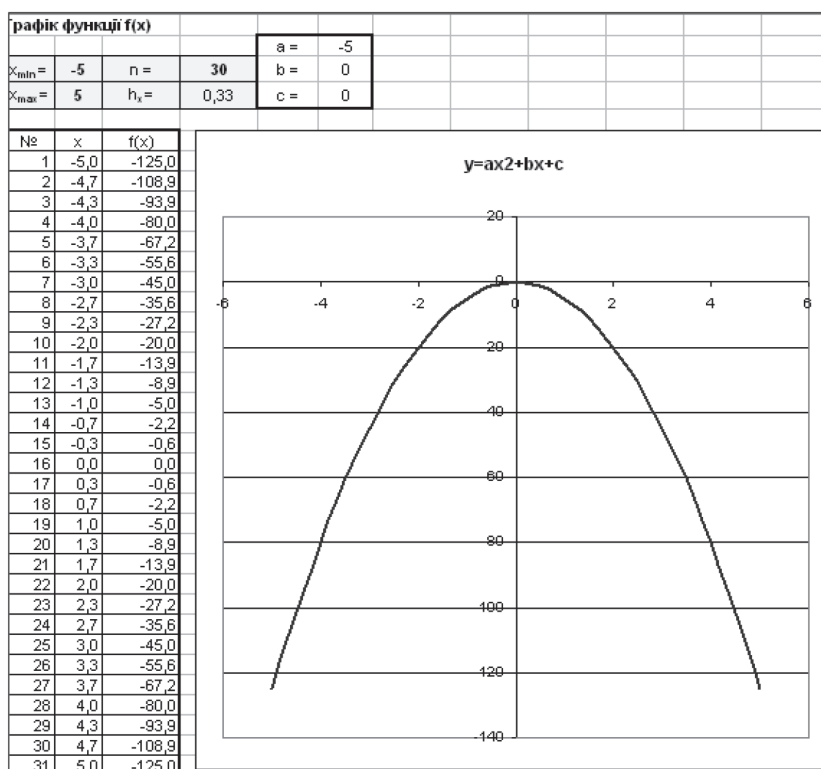
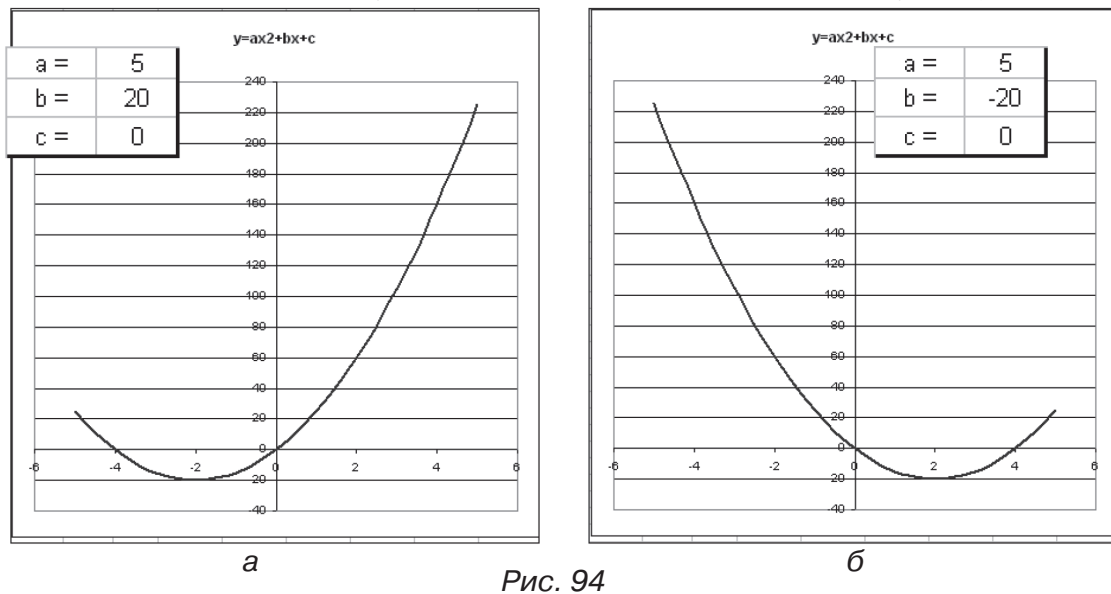


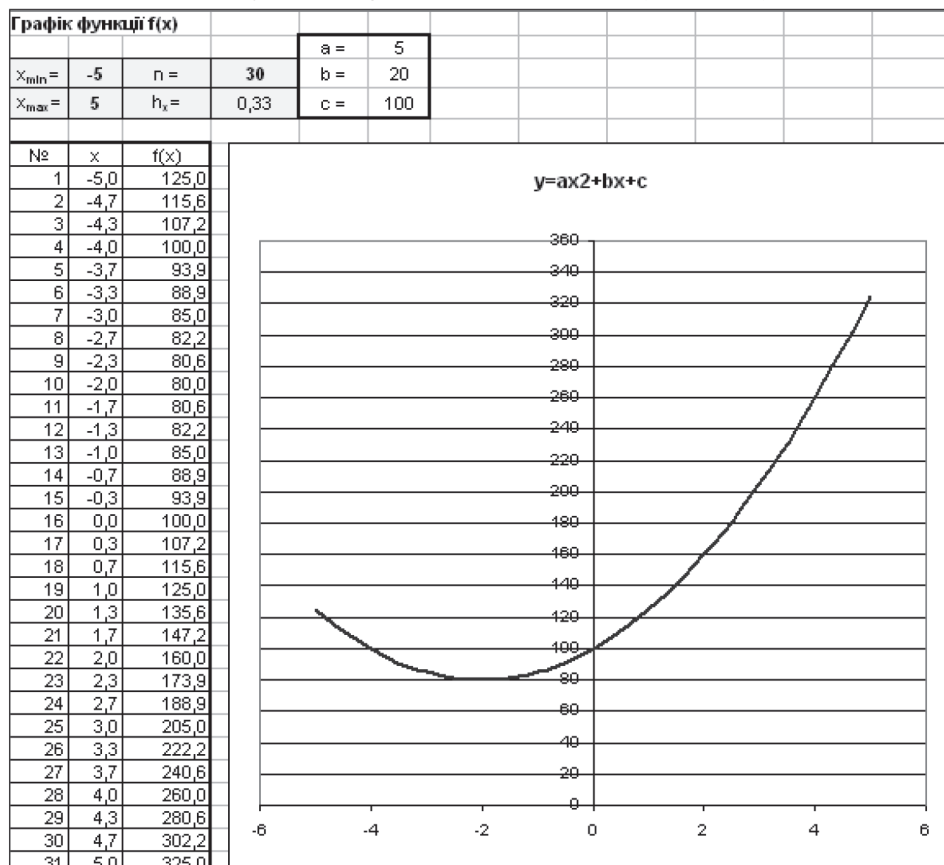
Рис. 93

в) $b \neq 0, c = 0, a > 0$, функція $y = ax^2 + bx$.

Графік функції розміщується у верхній напівплощині, мінімальне значення функції зміщено від початку системи координат на величину $\pm b$ (рис. 94, а, б):



г) $b > 0, c > 0, a > 0$, функція $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 95):



12. Побудувати і дослідити графік степеневі функції $y = ax^b$, ($a, b = \text{const}$).

Часткові випадки: $y = a$ ($b = 0$), $y = ax$ ($b = 1$), $y = ax^2$ ($b = 2$), $y = \frac{a}{x}$ ($b = -1$).

При $x < 0$ певні степеневі функції з дробовими показниками (наприклад, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$) недопустимі, це визначається у попередньому аналізі функції.

При цілочислових показниках ці функції існують і при $x < 0$, але їх графіки мають різний вигляд залежно від парності значення b . При парному b (наприклад, $y = ax^2$) графік симетричний відносно осі y (ординат), а при непарному b (наприклад, $y = ax^3$) — відносно початку координат (рис. 96):

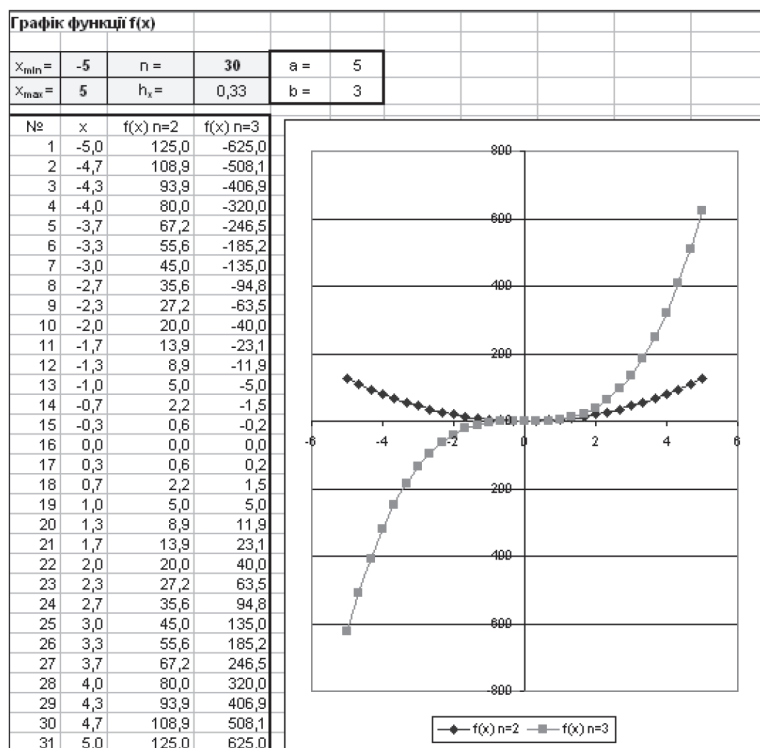


Рис. 96

При обробці статистичних даних завжди діє умова $x \geq 0$. За аналогією з графіком функції $y = ax^2$, лінія якого називається “парабола”, усі графіки функції типу $y = ax^n$ при $n > 1$ називають параболами n -го порядку (рис. 97):

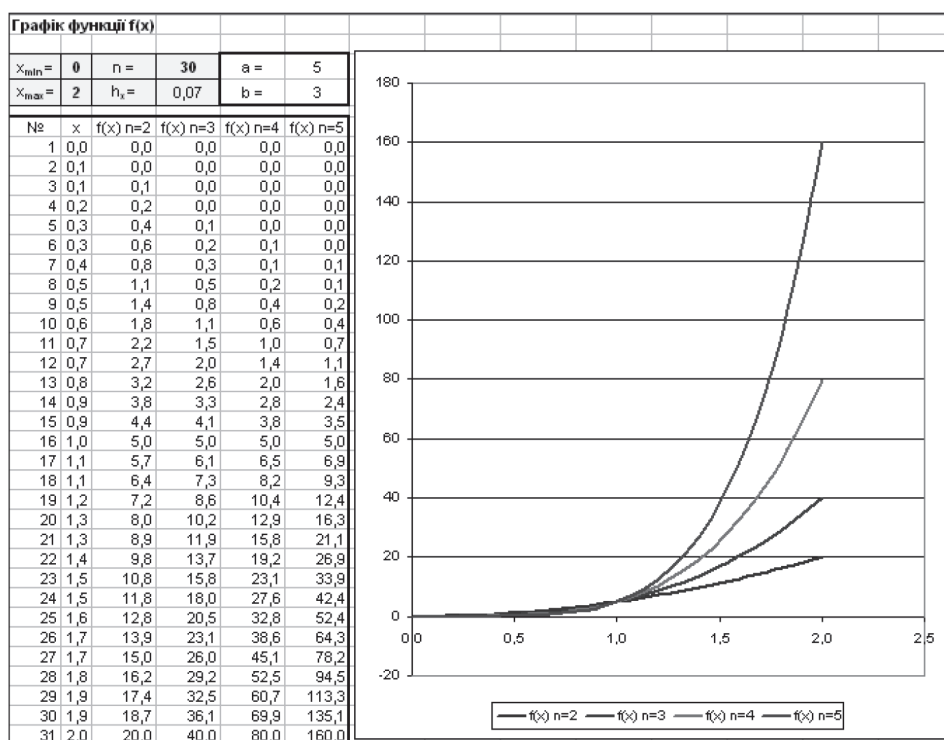


Рис. 97

При $n < -1$ графіком функції $y = ax^{-1}$ ($n = -1$) є гіпербола (рис. 98):

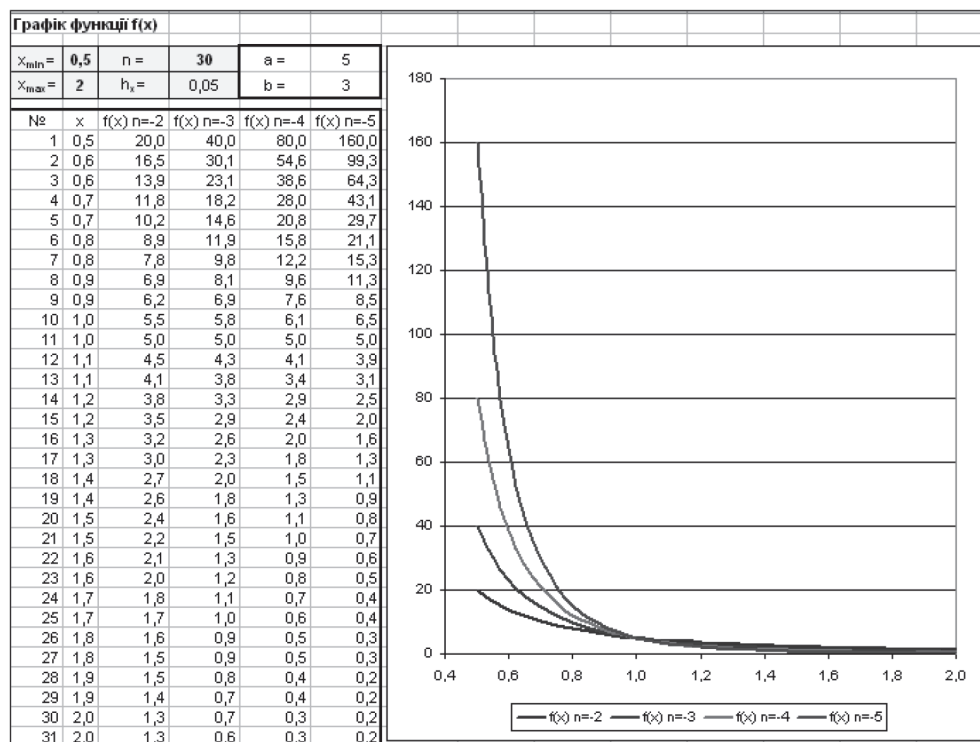


Рис. 98

13. Показникова функція типу $f(x) = a^x$ містить невідому змінну x як показник степеню, який приймає будь-які значення дійсного типу. Значення функції $f(x)$ беруться лише позитивними (рис. 99):

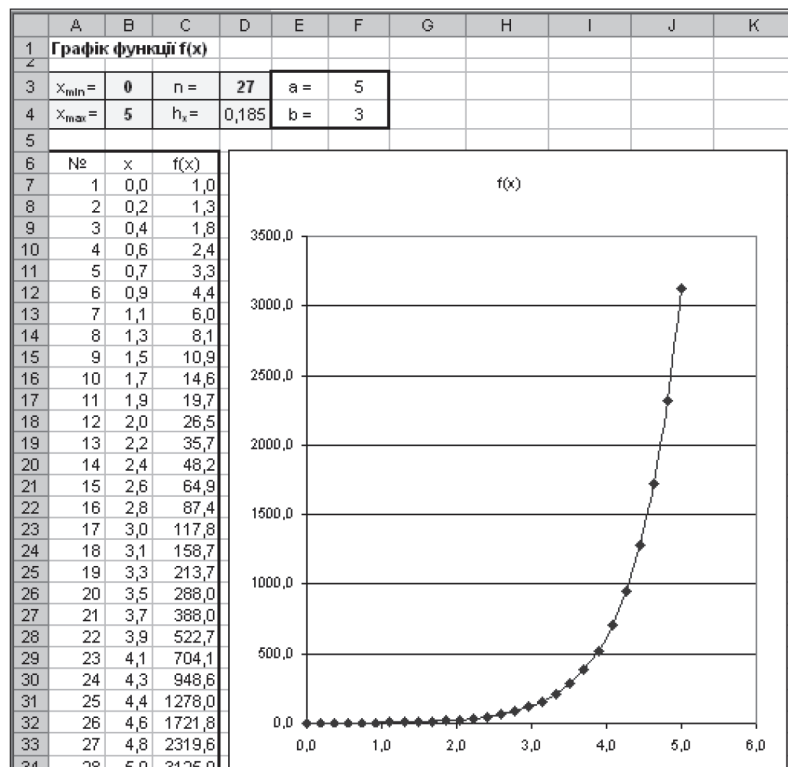


Рис. 99

14. Логарифмічна функція — обернена до показникової функції (див. рис. 100). Це означає, що графік її функції можна отримати з графіка показникової функції перегином креслення по бісектрисі першого координатного кута.

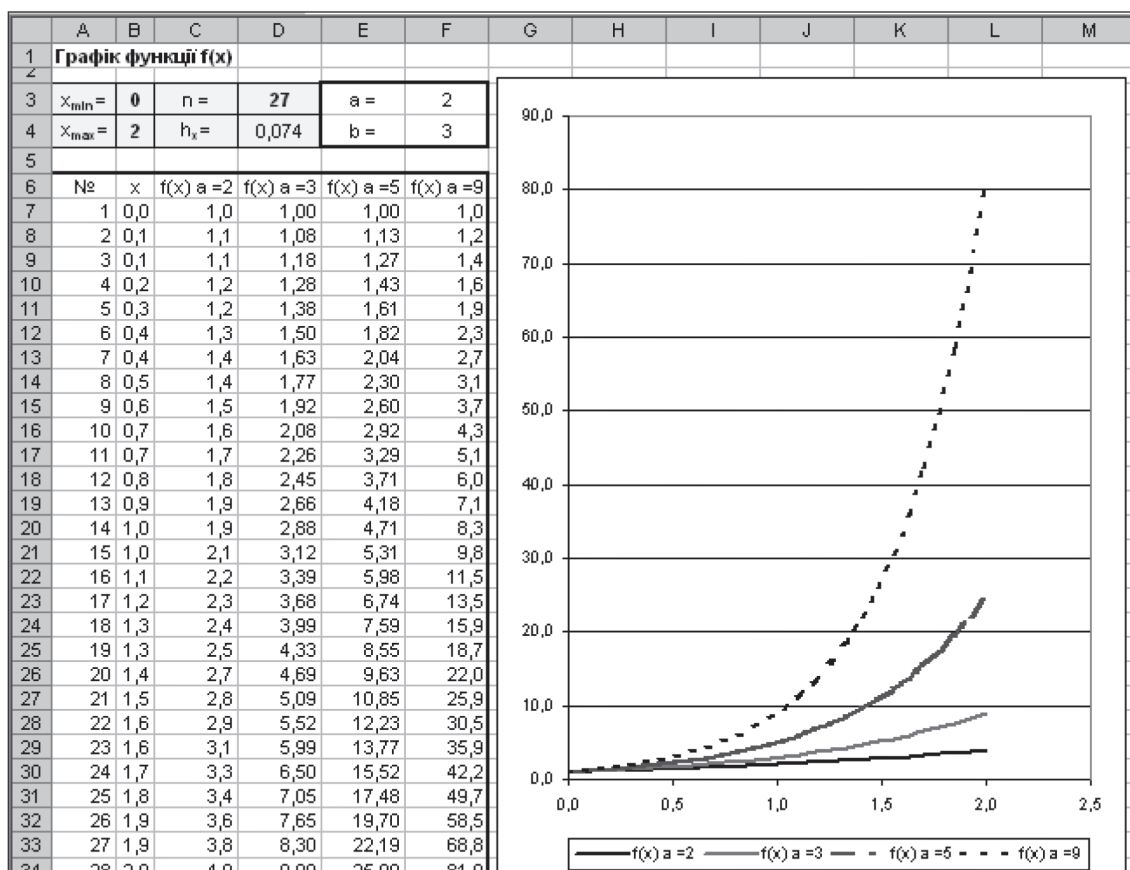


Рис. 100

Логарифмічна функція має загальний вигляд $f(x) = \log_a x$ (див. рис. 102), де число a — основа логарифма. Ексел пропонує три функції цього типу:

LN(x) — натуральний логарифм, $a =$ число e (2,718);

LOG(x, a) — логарифм з основою a (a — довільне число);

LOG10(x) — десятковий логарифм, $a = 10$, де a — позитивне постійне число (рис. 101):

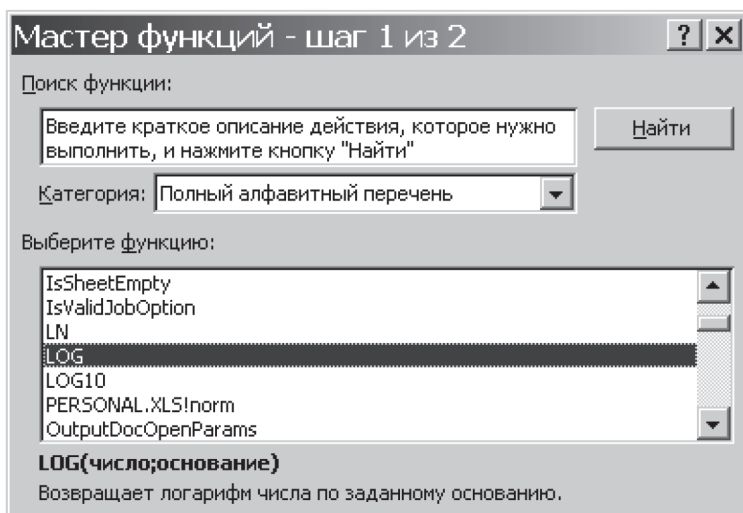


Рис. 101

Відомо, що логарифми чисел при різних основах пропорційні.

Порівняння графіків показникової ($y = e^x$) та оберненої до неї логарифмічної ($z = \ln(x)$) функцій, побудованих відносно бісектриси $y = x$ (рис. 103).

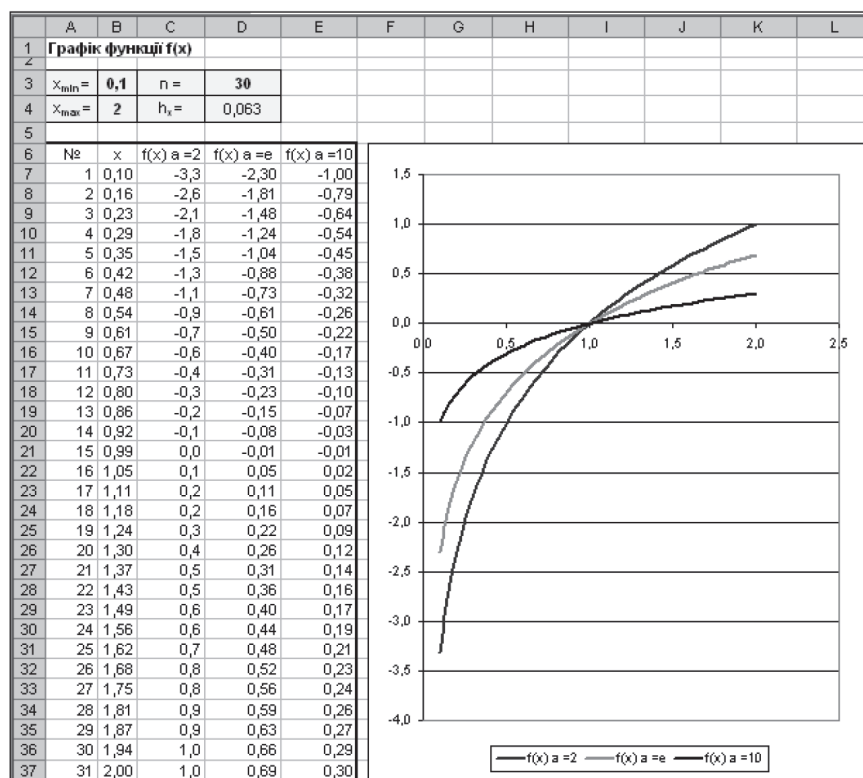


Рис. 102

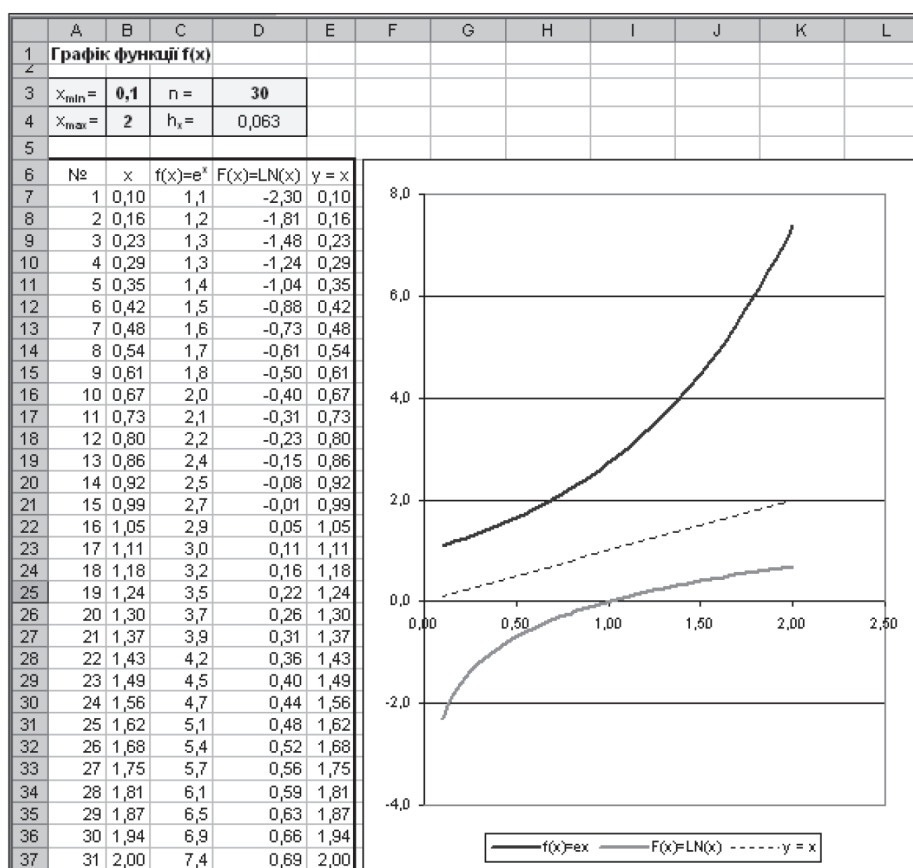
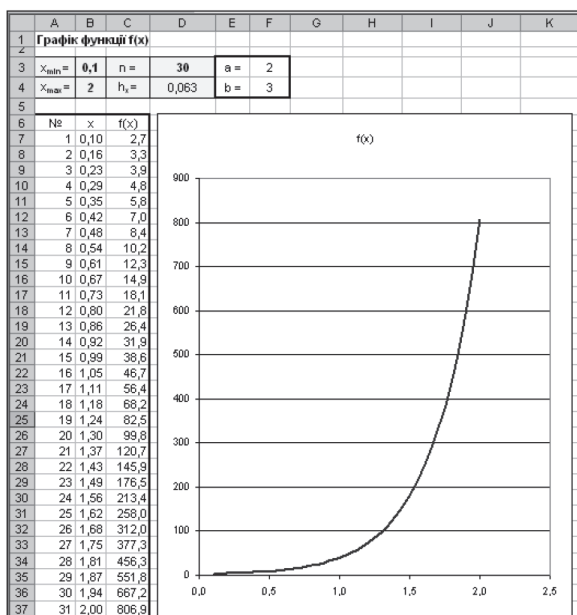


Рис. 103

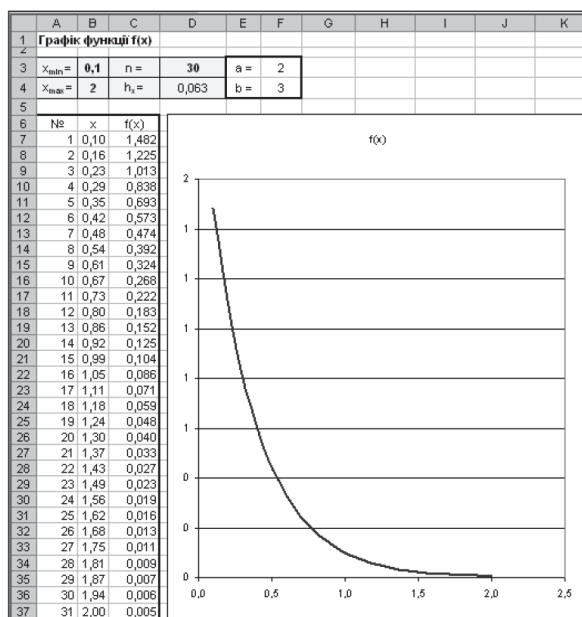
15. Експоненційна функція має вигляд $y = ae^{bx}$ та $y = ae^{-bx}$, її графіки (див. рис. 104, а, б) :

16. Логістична функція $y = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$ (див. рис. 105):



a

Рис. 104



б

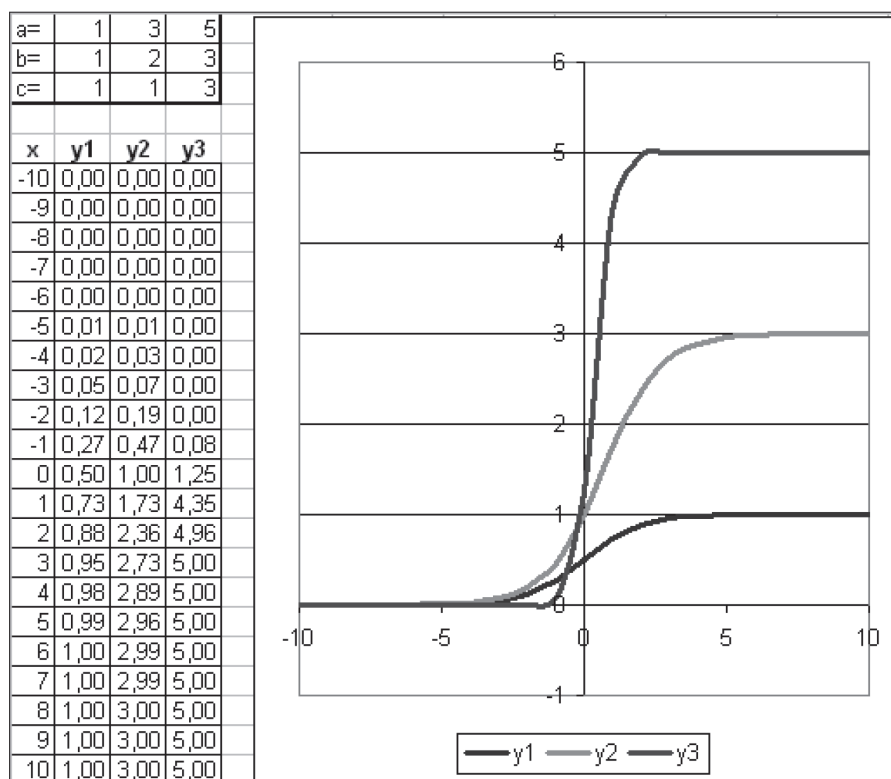


Рис. 105

Функцію, зображену на рис. 105, ще називають згладжувальною функцією. Вона широко використовується в нейронних мережах.

8.6. Варіанти завдань для СРС до теми наукова графіка

№ пор.	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	2	3	4	5
1	$\sqrt[3]{(1+x)(x^2+2x-2)}$	$\frac{2x^2-6}{x-2}$	$\begin{cases} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4}}, x \leq 0 \\ 2x + \frac{\sin^2 x}{2+x}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - 1$
2	$\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$	$\frac{2x^2-7}{\sqrt{3x^2-2}}$	$\begin{cases} \sqrt{1+x^2-\cos^2 x}, x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt[3]{e^{x+1}}}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{4} - 1$
3	$\sqrt[3]{(3+x)x^2}$	$\frac{2x^3-2x+1}{x^2-1}$	$\begin{cases} \sqrt{1+x^2}, x \leq 0 \\ \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{1+e^{0,2x}}}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$
4	$\sqrt[3]{(1-x)(x^2-2x-2)}$	$\frac{x^3+x^2-3x-1}{x^2-1}$	$\begin{cases} \sin x - 2\cos x, x \leq 0 \\ \sqrt{1+x^2}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - 1$
5	$\sqrt[3]{x^2(x^2+2)^2}$	$\frac{2x^3-3x^2-2x+1}{3x^2-1}$	$\begin{cases} 3\sin^2 x - \cos x, x \leq 0 \\ \sqrt{2+x^2}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{36} - 1$
6	$\sqrt[3]{x(x^2+2)^2}$	$\frac{x^2-5}{\sqrt{x^2-2}}$	$\begin{cases} 3\sin x - \cos^2 x, x \leq 0 \\ 3\sqrt{1+x^2}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1$
7	$\sqrt[3]{(3+x)(2x^2+x-1)}$	$\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$	$\begin{cases} \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}, x \leq 0 \\ -x + 2e^{-2x}, x \in (0; 1) \\ 2-x ^{\frac{1}{3}}, x \geq 1 \end{cases}$	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - 1$
8	$\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}$	$\frac{x^2-11}{4x-3}$	$\begin{cases} \frac{1+x}{1+x^2}, x < 0 \\ \sqrt{1+\frac{x}{1+x}}, x \in (0; 1) \\ 2 \sin(3x) , x \geq 1 \end{cases}$	$\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} - 1$
9	$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$	$\frac{2x^2-5}{\sqrt{3x^2-4}}$	$\begin{cases} \frac{1+ x }{\sqrt[3]{1+x+x^2}}, x \leq -1 \\ 2\ln(1+x^2), x \in (-1; 0) \\ (1+x)^{\frac{3}{5}}, x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1$
10	$\sqrt[3]{(2+x)^2(x^2-4)}$	$\frac{x^2-6x+4}{3x-2}$	$\begin{cases} \sqrt{1+ x }, x \leq 0 \\ \frac{1+3x}{2+\sqrt[3]{1+x}}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81} - 1$

1	2	3	4	5
11	$\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$	$\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} 3x+\sqrt{1+x^2}, & x < 0 \\ 2\cos x \cdot e^{-2x}, & x \in [0; 1] \\ 2\sin 3x, & x > 1 \end{cases}$	$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} - 1$
12	$\sqrt[3]{(4+x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$	$\frac{15-x^3}{2x-1}$	$\begin{cases} \frac{3x^2}{1+x^2}, & x \leq 0 \\ \sqrt{1+\frac{2x}{1+x^2}}, & x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1$
13	$\sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$	$\frac{2x^2-3x+1}{1-2x}$	$\begin{cases} \frac{1+\cos x}{1+x^2}, & x \leq 0 \\ x\cos x, & x > 0 \end{cases}$	$2y^2 - 9x^2 - 18$
14	$\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$	$\frac{3x^2-7}{2x+1}$	$\begin{cases} \sqrt[3]{1+x^2}, & x \leq 0 \\ \frac{1+x}{1+\cos^2 x}, & x > 0 \end{cases}$	$y^2 + 4x^2 - 4$
15	$\sqrt[3]{(6+x)x^2}$	$\frac{x^2-3}{\sqrt{4x^2-3}}$	$\begin{cases} \frac{3+\sin x}{1+x^2}, & x \leq 0 \\ 2x^2\cos^2 x, & x > 0 \end{cases}$	$y^2 - 2x^2 - 4$
16	$\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}$	$\frac{1-x^2}{\sqrt{16x^2-9}}$	$\begin{cases} x+\sqrt{1+x^2}, & x < 0 \\ \sin x \cdot e^{-x}, & x \in [0; 1] \\ 2\cos^2 x, & x > 1 \end{cases}$	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1$
17	$\sqrt[3]{x(x+3)^2}$	$\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$	$\begin{cases} \frac{\sqrt{1+ x }}{2+ x }, & x \leq 0 \\ \frac{1+x}{2+\cos^3 x}, & x > 0 \end{cases}$	$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} - 1$
18	$\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$	$\frac{17-x^2}{4x-5}$	$\begin{cases} \frac{3+\sin^2 2x}{1+\cos^2 x}, & x \leq 0 \\ 2\sqrt{1+2x}, & x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} - 1$
19	$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$	$\frac{4x^3+3x^2-2x-2}{x^2-1}$	$\begin{cases} x e^{-2x}, & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} - 1$
20	$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$	$\frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$	$\begin{cases} \frac{ x }{1+x^2}, & x < 0 \\ \sqrt{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} - 1$
21	$\sqrt[3]{(x-4)^2(x^2+2)}$	$\frac{4x^2+5}{4x+8}$	$\begin{cases} \frac{ x }{1+x^2}e^{-2x}, & x < 0 \\ \sqrt{1+x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} - 1$
22	$\sqrt[3]{(x-4)^2(x+2)}$	$\frac{x^3-4x}{3x^2-4}$	$\begin{cases} 3\sqrt{1+x^2}, & x < 0 \\ \sin 2x \cdot 3e^{-x}, & x \in [0; 1] \\ \cos x \sin x, & x > 1 \end{cases}$	$\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} - 1$

1	2	3	4	5
23	$\sqrt[3]{x^2(x-6)}$	$\frac{x^2-5}{\sqrt{9x^2-8}}$	$\begin{cases} 2\sqrt{1+x^2}, x \leq 0 \\ \frac{1}{1+\sqrt[3]{e^x}}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} - 1$
24	$\sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$	$\frac{4x^3+x^2-2x-1}{2x^2-1}$	$\begin{cases} \sqrt{1+2x^2}, x \leq 0 \\ \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{1+e^x}}, x > 0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - 1$
25	$\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$	$\frac{x^2-6x+4}{2-2x}$	$\begin{cases} 1+x+x^2, x < 0 \\ \sqrt{1+2x}, x \in [0; 1) \\ 2 0,5+\sin x , x \geq 1 \end{cases}$	$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} - 1$
26	$\sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$	$\frac{5x^2-3}{\sqrt{3x^2-1}}$	$\begin{cases} \sqrt{1+x^2}, x < 0 \\ 2\cos^2 x, x \in [0; 1] \\ \sqrt{1+\sqrt[3]{2\sin 3x}}, x > 1 \end{cases}$	$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{64} - 1$
27	$\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x}$	$\frac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}$	$\begin{cases} x ^{\frac{1}{3}}, x < 0 \\ -2x+\sqrt{x}, x \in [0; 1) \\ x-3 ^{0,1}, x \geq 1 \end{cases}$	$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} - 1$
28	$\sqrt[3]{(3+x)(x^2+6x+6)}$	$\frac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$	$\begin{cases} \frac{1+\sin x}{1+2\cos x}, x \leq 0 \\ \sqrt{1+x}, x > 0 \end{cases}$	$2y^2+9x^2-81$
29	$\sqrt[3]{(2+x)(x^2+4x+1)}$	$\frac{21-x^2}{7x-9}$	$\begin{cases} \sqrt{1+x-\sin x}, x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt[4]{e^{-0,1x}}}, x > 0 \end{cases}$	$9y^2+4x^2-16$
30	$\sqrt[3]{(x^2-x-3)^2}$	$\frac{4x^3-x}{x^2-1}$	$\begin{cases} \sqrt{1+2x^2-\sin^2 x}, x \leq 0 \\ \frac{2+x}{\sqrt[3]{2+e^{-0,1x}}}, x > 0 \end{cases}$	$9y^2-4x^2-16$

Розділ 9

ЗАВДАННЯ ДО ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

9.1. Завдання для практичних занять до теми границя числової послідовності

1. Опишіть геометричний зміст числа $|x - y|$.
2. Скільки ірраціональних чисел належать множині $A = \{x : |x + 2| \leq \sqrt{3}\}$?
3. Вкажіть два ірраціональних числа, добуток яких є раціональним числом.
4. Розв'яжіть нерівність $1 < (x - 1)^2 < 4$.
5. З'ясуйте, чи існує найменше раціональне число, яке є більшим за 0,2.
6. Доведіть нерівність $|1 - 3x| \leq |2x - 1| + |x|$.
7. Знайдіть точну верхню і точну нижню межі множини периметрів усіх правильних 2^{n+1} -кутників, $n \in \mathbb{N}$ описаних навколо круга радіуса R .
8. З'ясуйте, чи множина $H = \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k : n \in \mathbb{N} \right\}$ є обмеженою. Знайдіть $\sup H$ та $\inf H$ і з'ясуйте, чи $\max H = \sup H$ і $\inf H = \min H$.
9. З'ясуйте, чи обмеженою в $\mathbb{R}$ є множина $A = \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\sin k}{3^k} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
10. Знайдіть $\min A$, $\inf A$, $\max A$ і $\sup A$, якщо $A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
11. Знайдіть $\min A$, $\inf A$, $\max A$ і $\sup A$, якщо $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\} \cap \mathbb{Q}$.
12. Наведіть приклад відкритої множини $E \in \mathbb{R}$, яка має найменший елемент.
13. Вкажіть множину, звуження на яку функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$ є оборотною функцією.
14. Доведіть, що множини $H_1 = (0; +\infty)$ і $H_2 = (-\infty; +\infty)$ є еквівалентними.
15. Множина всіх раціональних чисел є зліченною. Доведіть це твердження.
16. Наведіть приклад незліченної множини, яка міститься у проміжку $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.
17. Сформулюйте означення границі послідовності.
18. Наведіть приклад обмеженої розбіжної послідовності.
19. Наведіть приклад обмеженої послідовності, яка має три часткові границі.
20. Наведіть приклад розбіжних в $\mathbb{R}$ послідовностей (x_n) і (y_n) , для яких послідовність $(x_n + y_n)$ є збіжною.
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Доведіть це твердження.

22. Границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ існує. Доведіть це твердження.
23. Допишіть рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} =$ і обґрунтуйте її.
24. Допишіть рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} =$.
25. Допишіть рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+3n}\right)^n =$.
26. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ і $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0): x_n < y_n$. Чи можна стверджувати, що: 1) $a < b$; 2) $a \leq b$; 3) $a = b$?
27. У будь-якому ε -околі точки міститься нескінченна кількість членів послідовності (x_n) . Чи можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$?
28. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} + x_{n-1})$.
29. Наведіть приклад послідовності (x_n) , для якої $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n < \varepsilon$.
30. Зовні деякого ε -окола точки 2 лежить один член послідовності (x_n) . Чи є послідовність (x_n) : а) збіжною; б) обмеженою?
31. Наведіть приклад немонотонної послідовності (x_n) , для якої $(\exists n \in \mathbb{N}): x_n < x_{n+1}$.
32. Наведіть приклад двох неспадних послідовностей, добуток яких є спадною послідовністю.
33. Якщо збіжною є послідовність (x_n) , то збіжною є і послідовність $(|x_n|)$. Доведіть це твердження.
34. Відомо, що послідовність $(|x_n|)$ є збіжною і має границю a . Що можна сказати про збіжність послідовності (x_n) ?
35. Сформулюйте і доведіть теорему про границю суми послідовностей.
36. Сформулюйте і доведіть теорему про існування границі монотонної послідовності.
37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0$. Доведіть це твердження.
38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. Доведіть це твердження.
39. Вкажіть ті члени послідовності (x_n) , які належать ε -околу точки a , якщо $x_n = 1 - 1/n$, $\varepsilon = 1$ і $a = 1$.
40. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2}}{1 + 3n^2}$.
41. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$.
42. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 2^{k-1}}{\sum_{k=1}^n 3^{k-1}}$.

43. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{2 + 4n^2}$.
44. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 1}{4^n} \right)^n$.
45. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)^{n+5}$.
46. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cos n}{n^2 + 1} + \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{3n+1} \right)$.
47. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n} + \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{6n^2 + 6n} \right)$.
48. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \sin n!}{n^2 + 1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$.
49. З'ясуйте, чи послідовність $\left(\frac{(-1)^n 2^n + 3}{2^n + 1} \arctg n \right)$ є обмеженою.
50. З'ясуйте, чи послідовність $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{5^k + k} \right)$ є обмеженою.
51. Відомо, що послідовність (x_n) задовольняє умову $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall m \geq n^*): |x_n - x_m| < \varepsilon$. Що можна сказати про збіжність послідовності (x_n) ?
52. Послідовність $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{2^k} \right)$ є збіжною в $\mathbb{R}$. Доведіть це твердження.
53. Знайдіть всі часткові границі послідовності $x_n = \sin \frac{\pi n}{4} + 1$.

9.2. Завдання для практичних занять до теми границя функції

- Вкажіть множину (область) визначення і множину значень функції $f(x) = \sqrt{\arctg x}$.
- Зобразьте графік функції $y = -|x - 2|$.
- Зобразьте графік функції $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$.
- Якщо $f(x) = \arcsin x$, то $f([2; 3]) = \emptyset$, $f([0; 2]) = [0; \pi/2]$, $f^{-1}([3; 4]) = \emptyset$, $f^{-1}([\pi/6; \pi]) = [1/2; 1]$. Вкажіть правильні твердження.
- Будь-яке раціональне число є періодом функції Діріхле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}.$$

6. Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
7. Доведіть, що $f'(-x) = -f'(x)$, якщо $f(-x) = f(x)$ і функція $f \in$ диференційованою на $\mathbb{R}$.
8. Допишіть рівність $(u + v)' =$ і обґрунтуйте її.
9. Допишіть рівність $(x'')' =$ і обґрунтуйте її.
10. Допишіть формулу $(e^x)' =$ і доведіть її.
11. Допишіть рівність $(\operatorname{arctg} x)' =$ і обґрунтуйте її.
12. Допишіть рівність $(\arcsin x)' =$ і обґрунтуйте її.
13. Опишіть взаємозв'язок між існуванням похідної і диференційованістю функції.
14. Знайдіть $d^2 f(x_0)$, якщо $f(x) = xe^x$, $x_0 = 1$, $dx = 0,1$.
15. Сформулюйте і доведіть теорему Лагранжа.
16. Запишіть формулу Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа в точці $a = 0$ для функції $f(x) = e^x$ і обґрунтуйте її.
17. Подайте функцію $f(x) = \frac{1}{2+x}$ у вигляді

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + r_m(x),$$
якщо $a = 2$, $m = 3$.
18. Доведіть, що для всіх $x \in [-1; 1]$ абсолютна похибка Δ наближеної формули $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ не перевищує $0,1$.
19. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.
20. $x + x^2 = o(x^3)$, $x \rightarrow \infty$. Чи справедливим є це твердження?
21. $x + \frac{1}{x} = o(x^3)$, $x \rightarrow 0$. Чи справедливим є це твердження?
22. $x + \frac{1}{x} = O(x^3)$, $x \rightarrow \infty$. Чи справедливим є це твердження?
23. $e^{\sqrt{x}} \sim e^{\sqrt{x+1}}$, $x \rightarrow \infty$. Чи справедливим є це твердження?
24. $\frac{2+e^x}{1+e^x} = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Чи справедливим є це твердження?
25. $\frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Чи справедливим є це твердження?
26. $x^3 = o(e^x)$, $x \rightarrow +\infty$. Чи справедливим є це твердження?
27. З'ясуйте, чи $f(2x) \sim f(x)$, якщо $x \rightarrow +\infty$ і $f(x) = \ln x$.

28. З'ясуйте, чи $f(x) = o(f(2x))$, якщо $x \rightarrow +\infty$ і $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
29. Знайдіть такі числа c_0 і c_1 , що $e^{x \sin x} = c_0 + c_1 x + o(x)$, $x \rightarrow 0$.
30. Доведіть, що $(\forall c_1 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta): f(x) \geq c_1 \varphi(x)$, якщо $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = x^2$.

9.3. Завдання для практичних занять до теми дослідження функції

- Сформулюйте означення точки мінімуму функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Сформулюйте і обґрунтуйте необхідні умови екстремуму функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Чи правильне твердження: якщо функція f — зростаюча на відкритому проміжку $(a; b)$, то $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$?
- Знайдіть проміжки звуження, на яких функція $f(x) = x^3 - 4x$ є оборотною функцією.
- Знайдіть проміжки монотонності функції $f(x) = 2 - 3x + x^3$.
- Знайдіть екстремуми функцій $f(x) = 6x - x^3$.
- Доведіть нерівність $e^x \geq 1 + x$, якщо $x \geq 0$.
- Доведіть нерівність $x \geq \frac{2}{\pi} x$, якщо $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- Доведіть нерівність $(1 + t)^\alpha \leq 1 + t^\alpha$, $[0; 1]$, $t \geq 0$.
- Доведіть нерівність $\arctg x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1+x}$, $x > 0$.
- Знайдіть проміжки опуклості і точки перегину функції $f(x) = e^{-x} + x^2$.
- Знайдіть асимптоти функції $f(x) = \frac{x^4}{4(x-2)}$.
- Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$ на проміжку $[-1; 1]$.
- Зобразьте схематично графік функції f , якщо $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.
- Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на відрізку $[-2; 1]$.
- Знайдіть екстремуми функції $y(x) = 3x^2 - 4x^3$.
- Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}$ на проміжку $[-1; 1]$.
- Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на заданому проміжку на проміжку $[1; 3]$.
- Знайдіть найбільше значення функції $y(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ на проміжку $[0; 2]$.
- Скільки точок екстремуму має функція $y(x) = (x^2 - 4)^3$?
- Скільки точок екстремуму має функція $y(x) = (x^3 + x)^3$?
- Скільки точок екстремуму має функція $y(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$?

23. Знайдіть абсцису точки параболи $y = -x^2 + 8x - 3$, у якій кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює -6 .
24. Знайдіть ординату точки параболи $y = x^2 + 4x - 7$, у якій кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює 6 .
25. Рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд $y = 8x - 19$. Знайдіть абсцису точки дотику.
26. Рівняння дотичної до кривої $y = -x^2 + 5x + 4$ має вигляд $y = 3x + 5$. Знайдіть ординату точки дотику.
27. Скільки критичних точок має функція $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$?
28. Знайдіть найменшу критичну точку функції $y = \sqrt[3]{x^2 + 9x - 10}$.
29. Знайдіть найбільше значення $f(x) = 2^{-x^2}$ на відрізку $[0; 2]$.
30. Знайдіть найбільше значення функції $y = |x^2 - 3x|$ на проміжку $[0; 3]$.
31. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = \frac{(3x - 5)(-25 - x)}{(x + 5)^2}$.
32. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = \frac{(3x - 11)(-7 - x)}{(x - 1)^2}$.
33. Знайдіть найменше ціле значення a , при якому функція $y = x^3 + ax + x + 1$ зростає на всій числовій осі.
34. Знайдіть найменше ціле значення a , при якому функція $y = e^{ax} + ax$ зростає на всій числовій осі.
35. Знайдіть суму параметрів a і b , при яких параболи $y = x^2 - 4x - a$ і $y = -x^2 + 2x + b$ мають спільну дотичну, паралельну осі абсцис.
36. Знайдіть абсцису точки перетину осі OX з дотичною до графіка функції $y = 0,5x^2 + 1$, якщо дотична проходить через точку $M(-1; -3)$ і має додатний кутовий коефіцієнт.

9.4. Завдання для практичних занять до теми невизначений інтеграл

1. Сформулюйте означення первісної і невизначеного інтеграла.
2. Знайдіть $\int x\sqrt{1-x^2} dx$.
3. Знайдіть $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.
4. Знайдіть $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}$.
5. Знайдіть $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.
6. Знайдіть $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$.

7. Знайдіть $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.
8. Знайдіть $\int x \sin x dx$.
9. Знайдіть $\int x \ln x dx$.
10. Знайдіть $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.
11. Знайдіть $\int x e^{\sqrt{x}} dx$.
12. Знайдіть $\int \cos^2 x dx$.
13. Знайдіть $\int \sin^3 x dx$.
14. Знайдіть $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx$.
15. Доведіть $\int x f'(x) dx = x f(x) - F(x) + C$, якщо функція f має похідну і первісну F на проміжку Δ , що розглядається.
16. Виходячи з означення первісної і невизначеного інтегралу, покажіть, що $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $x \in (-a; a)$, $a > 0$.
17. Сформулюйте означення визначеного інтеграла (інтеграла Рімана).
18. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то вона є обмеженою на $[a; b]$. Доведіть це твердження.
19. Якщо $a \leq b$, функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$ і $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Доведіть це твердження.

9.5. Контрольні завдання до теми ліміти

Знайти ліміти:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (0,5x^{-0,5}y^{0,5}) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0} (0,5x^{0,5}y^{-0,5}) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (-0,25x^{-1,5}y^{0,5}) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (-0,25x^{0,5}y^{-1,5}) &= 0. \end{aligned}$$

9.6. Контрольні завдання до теми часткова похідна

Часткові похідні першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 0,5x^{-0,5}y^{0,5} \geq 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 0,5x^{0,5}y^{-0,5} \geq 0. \end{aligned}$$

Часткові похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -0,25x^{-1,5}y^{0,5} \leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -0,25x^{0,5}y^{-1,5} \leq 0.$$

9.7. Завдання для поточного контролю з теми математичний аналіз, поверхневі інтеграли

Варіант 1

1. Що таке розбиття прямокутника у двовимірному просторі Евкліда? Дати означення нижньої та верхньої сум Дарбу.
2. Сформулювати теорему та вивести формулу Гаусса-Остроградського.
3. Практичні завдання:

(i) Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_Q (\sqrt{x} + 6y^2) dx dy, \quad Q = [0; 4] \times [0; 1].$$

(ii) Знайти всі частинні похідні другого порядку функції

$$f(x, y) = x \ln y.$$

Варіант 2

1. Дати означення подвійного інтеграла по прямокутнику. Сформулювати та довести теорему про інтегрованість неперервної функції по прямокутнику.
2. Записати формулу Гаусса-Остроградського. Дати означення дивергенції. Сформулювати фізичну інтерпретацію формули Гаусса-Остроградського та записати її у векторній формі.
3. Практичні завдання:

(i) Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_Q 2xe^{xy} dx dy, \quad Q = [0; 1] \times [1; 2].$$

(ii) Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду

$$\int_L \sin(y+1) dL, \quad \text{де } L \text{ — відрізок } AB, A(0; 0), B(3; 1).$$

Варіант 3

1. Сформулювати та довести теорему, яка зводить обчислення подвійного інтеграла по прямокутнику до двох інтегралів Рімана.
2. Побудувати інтеграл Лебега для простих функцій. Сформулювати теорему про обчислення інтеграла Лебега для “функції-драбини”.
3. Практичні завдання:

(i) Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \text{ де } Q = [0; a] \times [0; b] \times [0; c], a > 0, b > 0, c > 0.$$

(ii) Знайти похідну функції $f(x, y) = x^2 - y^2$ в точці $M(1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Варіант 4

1. Дати означення нижнього і верхнього інтегралів по паралелепіпеду та потрійного інтеграла по паралелепіпеду в тривимірному просторі Евкліда.
2. Записати формулу Гріна. Сформулювати теорему, яка вказує умови, коли значення криволінійного інтегралу другого роду дорівнює нулю і значення криволінійного інтегралу не залежить від шляху інтегрування.
3. Практичні завдання:

(i) Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_Q \left(\frac{1}{x} + 8y^3 \right) dx dy, \quad Q = [1; 2] \times [0; 1].$$

(ii) Обчислити диференціал другого порядку функції

$$f(x, y) = x^2 y^3 + \sin(xy).$$

9.8. Контрольна робота з курсу вищої математики № 1

9.8.1. Зразок розв'язання і оформлення контрольної роботи № 1

Зразок розв'язання варіанта

Завдання 1. Дослідити на сумісність і розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методом Гаусса, Крамера та матричним

$$\begin{cases} x - 5y + 2z = -2 \\ 2x - 10y - z = -9 \\ 8x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

Розв'язання. Дослідимо систему рівнянь на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. Запишемо розширену матрицю A^* системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -10 & -1 & -9 \\ 8 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Виконаємо елементарні перетворення матриці A^* , а саме: помножимо елементи першого рядка на (-2) і додамо до другого. Помноживши елементи першого рядка на (-8) і додавши до третього рядка, отримаємо:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -10 & -1 & -9 \\ 8 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 38 & -19 & 19 \end{array} \right).$$

Оскільки $r(A) = r(A^*)$ і кількість невідомих $n = 3$, то система сумісна і має єдиний розв'язок.

Відповідно до останньої матриці система набула трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x - 5y + 2z = -2 \\ 38y - 19z = 19; \\ -5z = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 5y + 2z = -2 \\ 38y - 19z = 19; \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 5y + 2z = -2 \\ 38y = 38; \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \\ z = 1 \end{cases}$$

Отже, розв'язком системи є $x = 1, y = 1, z = 1$:

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера.

Знайдемо визначник системи рівнянь Δ та визначники $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -10 & -1 \\ 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 190, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 2 \\ -9 & -10 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 190,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -9 & -1 \\ 8 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 190, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & -10 & -9 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 190.$$

Оскільки $\Delta = 190 \neq 0$, то система рівнянь має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{190}{190} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{190}{190} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{190}{190} = 1.$$

Отже, розв'язком системи є: $x = 1, y = 1, z = 1$. Дійсно, підставивши отриманий розв'язок у задану систему рівнянь, отримаємо тотожності.

Розв'яжемо систему рівнянь матричним методом.

Запишемо матриці A, B та X системи у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -10 & -1 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Систему лінійних рівнянь можна записати матричним рівнянням $A \cdot X = B$, розв'язок якого задається формулою $X = A^{-1} \cdot B$.

Знайдемо матрицю, обернену до матриці A . Для цього спочатку обчислимо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -10 & -1 \\ 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 190.$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то обернена матриця існує. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 30 - 2 = 28; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 + 8) = -2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 80 = 76; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(15 + 4) = -19;$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 16 = -19; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 40) = -38; \\
A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 20 = 25; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 4) = 5; \\
A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0.
\end{aligned}$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{190} \begin{pmatrix} 28 & -19 & 25 \\ -2 & -19 & 5 \\ 76 & -38 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю X як добуток двох матриць A^{-1} і B :

$$\begin{aligned}
X &= A^{-1} \cdot B = \frac{1}{190} \begin{pmatrix} 28 & -19 & 25 \\ -2 & -19 & 5 \\ 76 & -38 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{190} \cdot \begin{pmatrix} -56 + 171 + 75 \\ 4 + 171 + 15 \\ -152 + 342 + 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{190} \cdot \begin{pmatrix} 190 \\ 190 \\ 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким чином, $x = 1, y = 1, z = 1$.

Завдання 2. Задані координати точок $A_1(4; -2; 3)$, $A_2(1; -3; 2)$, $A_3(3; 1; 5)$, $S(4; 3; 1)$ — вершини піраміди $A_1A_2A_3S$. Знайти:

- координати векторів $\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SA_2}$, $\overrightarrow{SA_3}$ та їхні довжини;
- кут при вершині S грані A_1SA_2 ;
- площу основи $A_1A_2A_3$ піраміди $A_1A_2A_3S$;
- об'єм піраміди $A_1A_2A_3S$ та довжину висоти SO , опущеної з вершини S на основу $A_1A_2A_3$.

Розв'язання:

- знайдемо координати векторів $\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SA_2}$, $\overrightarrow{SA_3}$:

$$\overrightarrow{SA_1} = (4 - 4; -2 - 3; 3 - 1) = (0; -5; 2),$$

$$\overrightarrow{SA_2} = (1 - 4; -3 - 3; 2 - 1) = (-3; -6; 1),$$

$$\overrightarrow{SA_3} = (3 - 4; 1 - 3; 5 - 1) = (-1; -2; 4).$$

Визначимо довжини векторів:

$$|\overrightarrow{SA_1}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29},$$

$$|\overrightarrow{SA_2}| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{46},$$

$$|\overrightarrow{SA_3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

б) знайдемо $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\overrightarrow{SA_1} \cdot \overrightarrow{SA_2}}{|\overrightarrow{SA_1}| |\overrightarrow{SA_2}|}.$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{SA_1} \cdot \overrightarrow{SA_2} = 32$.

$$\text{Кут при вершині } S \text{ грані } A_1SA_2: \cos \varphi = \frac{32}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{46}} = \sqrt{\frac{16}{29}}.$$

в) якщо відомі координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$, то його площу можна знайти за формулою:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|.$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-3; -1; -1), \overrightarrow{A_1A_3} = (-1; 3; 2).$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |1 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} - 10 \cdot \vec{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 7^2 + (-10)^2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Отже, площа основи $A_1A_2A_3$ піраміди $A_1A_2A_3S$ дорівнює $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

г) знайдемо об'єм піраміди $A_1A_2A_3S$:

$$V_{A_1A_2A_3S} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{SA_1} \overrightarrow{SA_2} \overrightarrow{SA_3}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{31}{6}.$$

З формули об'єму піраміди $V_{A_1A_2A_3S} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_2A_3} \cdot H$ знайдемо

$$H = \frac{3V_{A_1A_2A_3S}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}}, \quad H = \frac{\frac{31}{6} \cdot 3}{\frac{5\sqrt{6}}{2}} = \frac{31\sqrt{6}}{30}.$$

Завдання 3. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом, якщо:

$$\vec{a} = (1; -3; 1), \vec{b} = (1; -5; 2), \vec{c} = (1; -4; 1), \vec{d} = (0; 0; 4).$$

Розв'язання. Дослідимо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на компланарність або лінійну залежність, знайшовши їх мішаний добуток:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Оскільки мішаний добуток векторів не дорівнює нулю, то вектори некомпланарні, тобто лінійно незалежні і тому утворюють базис.

Вектор $\vec{d}$ можна розкласти за базисом векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Лінійна комбінація матиме вигляд: $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$.

Запишемо систему рівнянь для знаходження α , β , γ , прирівнявши відповідні координати:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1 = 0 \\ \alpha \cdot (-3) + \beta \cdot (-5) + \gamma \cdot (-4) = 0. \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 4 \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему за допомогою формул Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 4 - 6 + 5 + 8 + 3 = 1;$$

$$\Delta_{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -16 + 20 = 4;$$

$$\Delta_{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12 + 16 = 4;$$

$$\Delta_{\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 12 = -8.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4; \quad \beta = \frac{\Delta_{\beta}}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4; \quad \gamma = \frac{\Delta_{\gamma}}{\Delta} = \frac{-8}{1} = -8.$$

Таким чином, маємо розклад вектора $\vec{d}$ за базисом векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:
 $\vec{d} = 4\vec{a} + 4\vec{b} - 8\vec{c}$.

Завдання 4. Обчислити границі, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 7x - 6}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^{x+2}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x + 1}{x^3 - 5x + 4}.$$

Розв'язання:

а) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, а потім скоротимо дріб на $x + 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 7x - 6} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \\ &= \frac{-3 \cdot (-4)}{-1 \cdot (-5)} = \frac{12}{5}; \end{aligned}$$

б) помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{21+x} + 5$, а потім скоротимо дріб на $x - 4$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{21+x-25}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)} = \frac{1}{480};\end{aligned}$$

в) користуючись таблицею еквівалентних нескінченно малих величин, замінимо нескінченно малі величини в чисельнику і знаменнику еквівалентними:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2;$$

г) скористаємось другою важливою границею:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x-1}{3-x}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{3-x}\right)^{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-3}\right)^{(x-3)\frac{x+2}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-3}} = e;\end{aligned}$$

д) поділимо чисельник і знаменник дробу на x у найбільшому степені, тобто на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+7x+1}{x^3-5x+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = 0.$$

Завдання 5. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \ln^3 \sin(e^{-5x} + 2); \quad \text{б) } y = (\sin x)^{\ln 2x}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \log_3(t+2); \\ y = 2^t + 4t \end{cases};$$

$$\text{г) } \operatorname{tg}(xy) + y = 2 \cos x.$$

Розв'язання:

а) скористаємось правилом диференціювання складеної функції:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{3 \ln^2 \sin(e^{-5x} + 2) \cdot \cos(e^{-5x} + 2) \cdot e^{-5x} \cdot (-5)}{\sin(e^{-5x} + 2)} = \\ &= -15 \ln^2 \sin(e^{-5x} + 2) \cdot \operatorname{ctg}(e^{-5x} + 2) \cdot e^{-5x};\end{aligned}$$

б) прологарифмуємо обидві частини рівності, а потім продиференціюємо отриману рівність, використовуючи правило диференціювання складеної функції: $\ln y = \ln 2x \cdot \ln(\sin x)$, $\frac{y'}{y} = (\ln 2x)' \cdot \ln(\sin x) + \ln 2x \cdot (\ln(\sin x))' =$

$$= \frac{1}{x} \ln(\sin x) + \ln 2x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$

звідси:

$$y' = (\sin x)^{\ln 2x} \cdot \left(\frac{1}{x} \ln(\sin x) + \ln 2x \cdot \operatorname{ctg} x \right);$$

$$\text{в) знайдемо похідну } y'_x : y'_x = \frac{(2^t + 4t)'}{(\log_3(t+2))'} = (2^t \ln 2 + 4)(t+2) \ln 3;$$

г) продиференціюємо обидві частини рівності по x , вважаючи y функцією від x :

$$\frac{1}{\cos^2(xy)} \cdot (xy)' + y' = -2 \sin x; \quad \frac{1}{\cos^2(xy)} \cdot (y + xy)' + y' = -2 \sin x;$$

$$y' \left(\frac{x}{\cos^2(xy)} + 1 \right) = -2 \sin x - \frac{y}{\cos^2(xy)}; \quad y' = -\frac{2 \sin x \cdot \cos^2(xy) + y}{x + \cos^2(xy)}.$$

Завдання 6. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

$$\text{а) } y = \frac{1-x^3}{x^2}; \quad \text{б) } y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання:

а) область визначення даної функції $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. У точці $x = 0$ функція має розрив. Знайдемо односторонні границі функції:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty,$$

де $x = 0$ — точка розриву другого роду.

Пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою кривої.

Функція ні парна, ні непарна, неперіодична.

Знайдемо екстремуми та інтервали монотонності функції:

$$y' = \frac{-3x^2 \cdot x^2 - (1-x^3) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3 + 2}{x^3},$$

$y' = 0$ в точці $x = -\sqrt[3]{2}$, яка є критичною, y' не існує в точці $x = 0$, але це не критична точка, тому що вона є точкою розриву.

$y' > 0$ — функція зростає при $x \in (-\sqrt[3]{2}; 0)$,

$y' < 0$ — функція спадає при $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (0; +\infty)$.

Отже, $x = -\sqrt[3]{2}$ — точка мінімуму: $y_{\min} = y(-\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Знайдемо інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину:

$$y'' = -\frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2(x^3 + 2)}{x^6} = \frac{6}{x^4}; \quad y'' \neq 0,$$

y'' не існує при $x = 0$, але ця точка не може бути точкою перегину, тому що є точкою розриву.

Отже, графік функції не має точок перегину, причому $y'' > 0$ на всій області визначення, тому графік функції всюди вгнутий.

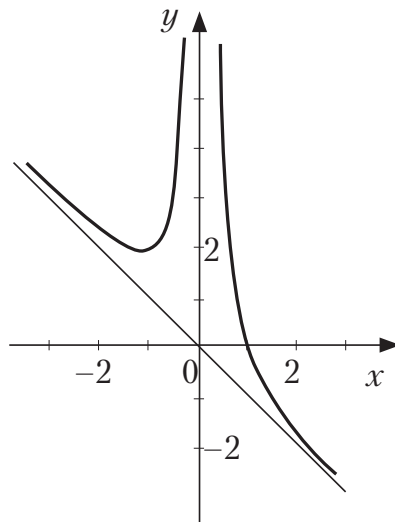
Знайдемо асимптоти: $x = 0$ — вертикальна асимптота;

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x^3} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x^3}{x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

де пряма $y = -x$ — похила асимптота.

Графік функції перетинає вісь Ox у точці $(1; 0)$ і не перетинає вісь Oy .

За результатами досліджень будуюмо графік функції:



б) область визначення даної функції $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. У точці $x = 0$ функція має розрив. Використовуючи правило Лопіталя, знайдемо односторонні границі функції:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} x^2 e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0; \end{aligned}$$

аналогічно $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = e^{\infty} = \infty,$

де $x = 0$ — точка розриву другого роду.

Пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою кривої.

Функція ні парна, ні непарна, неперіодична.

Знайдемо екстремуми та інтервали монотонності функції:

$$y' = e^{\frac{1}{x}} (2x - 1),$$

$y' = 0$ в точці $x = \frac{1}{2}$, яка є критичною, y' не існує в точці $x = 0$, але це не критична точка, тому що вона є точкою розриву.

$$y' > 0 \text{ — функція зростає при } x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty \right),$$

$$y' < 0 \text{ — функція спадає при } x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2} \right).$$

Отже, $x = \frac{1}{2}$ — точка мінімуму: $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$.

Знайдемо інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину:

$$y'' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} e^x, \quad y'' \neq 0,$$

y'' існує на всій області визначення функції. Отже, графік функції не має точок перегину, причому $y'' > 0$ на всій області визначення, тому графік функції всюди вгнутий.

Знайдемо асимптоти: $x = 0$ — вертикальна асимптота;

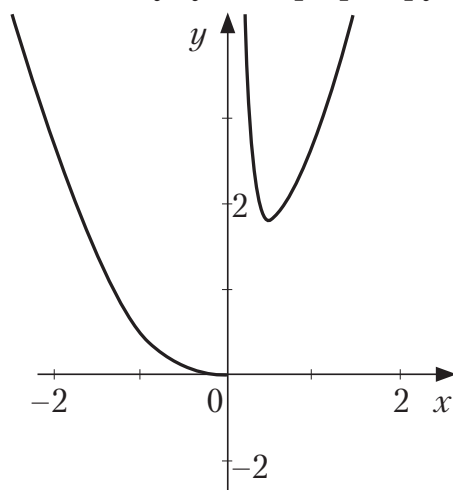
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

де похилих асимптот немає.

Графік функції не перетинається з осями координат. Початок координат є граничною точкою лівої вітки графіка.

Знайдемо кілька допоміжних точок: $\left(-2; \frac{4}{\sqrt{e}}\right); (1; e); \left(-1; \frac{1}{e}\right)$.

За результатами досліджень будуємо графік функції:



Завдання 7. Знайти екстремум функції:

$$z = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - 3x + 2y - 1.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку критичні точки, тобто точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, або не існують (саме в цих точках може міститися екстремум функції): $z'_x = 4x - 3y - 3$; $z'_y = -3x + 10y + 2$.

Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 4x - 3y - 3 = 0 \\ -3x + 10y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 31y - 1 = 0 \\ 31x - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/31 \\ x = 24/31 \end{cases}$$

й отримуємо координати критичних точок

$$M_0\left(\frac{24}{31}; \frac{1}{31}\right).$$

Далі перевіряємо за допомогою достатньої умови існування екстремуму чи буде в точці M_0 екстремум. Для цього обчислюємо похідні другого порядку:

$$A = z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4x - 3y - 3)'_x = 4,$$

$$B = z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4x - 3y - 3)'_y = -3,$$

$$B = z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-3x + 10y + 2)'_x = -3,$$

$$C = z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-3x + 10y + 2)'_y = 10.$$

Складаємо визначник другого порядку з цих похідних в точці M_0 . У даному випадку частинні похідні другого порядку виявляються сталими величинами і тому

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 9 = 31 > 0.$$

Таким чином, у критичній точці $M_0\left(\frac{24}{31}; \frac{1}{31}\right)$ функція має мінімум, тому що $z''_{xx}|_{M_0} = 4 > 0$.

Обчислимо мінімальне значення функції

$$z_{\min} = 2\left(\frac{24}{31}\right)^2 - 3 \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{1}{31} + 5\left(\frac{1}{31}\right)^2 - 3 \cdot \frac{24}{31} + 2 \cdot \frac{1}{31} = -\frac{2046}{961} = -2\frac{4}{31}.$$

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ КРИПТОГРАФІВ

9.9. Теорія скінченних полів, групи і підгрупи

9.9.1. Групи та їх властивості. Підгрупи. Приклади груп

Означення. Групою $(G, \cdot)$ називається алгебраїчна структура з однією операцією $\cdot$, для якої виконуються умови:

1) операція $\cdot$ асоціативна: $\forall a, b, c \in G$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

2) існує елемент $e \in G$ такий, що для будь-якого $a \in G$

$$e \cdot a = a \cdot e = a$$

(e — одиничний або нейтральний елемент G);

3) для будь-якого $a \in G$ існує елемент $a^{-1} \in G$ такий, що

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

(a^{-1} — обернений до a елемент).

Зауваження. Якщо операція $\cdot$ в групі (говорять також *груповою операцією*) — додавання, то a^{-1} позначають $-a$ і називають *протилежним* елементом до елемента a . Замість $b + (-a)$ пишуть $b - a$.

Групи з операцією додавання часто називають **адитивними групами**, а групи з операцією множення — **мультиплікативними**. Проте треба розуміти, що елементами групи можуть бути математичні об'єкти різної природи (числа з певної множини, матриці, функції, геометричні фігури тощо), і поняття додавання або множення є досить умовним.

Надалі, якщо не треба зазначати, яка саме операція використовується в групі, будемо замість $a \cdot b$ писати ab .

Якщо операція в групі G комутативна:

$$\forall a, b \in G: ab = ba,$$

то група G називається **абелевою**.

Властивості груп

1. Єдиність нейтрального елемента.

2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Доведення випливає з означення оберненого і безпосередньої перевірки.

3. Можливість скорочувати: $ac = bc$ звідси $\Rightarrow a = b$, окрім того має місце рівність $ca = cb$.

Доведення випливає з комутативності й існування оберненого елемента c^{-1} . Домножуємо на c^{-1} зліва й отримуємо рівність $a = b$.

4. Єдиність оберненого елемента $\forall a \in G$.

Доведення. Нехай маємо $aa^{-1} = e$ і окрім цього існує ще один обернений, який позначимо b . Тоді $ab = e$, домножимо на a^{-1} : $a^{-1}ab = a^{-1}e$, але $a^{-1}e = a^{-1}$ згідно з означенням нейтрального елемента, тому $a^{-1}ab = b = a^{-1}$. Коротко це можна виразити так: $a^{-1}ab = a^{-1}e = a^{-1}$, звідки $b = a^{-1}$.

5. $\forall a, b \in G \exists! c \in G : a = bc$ та $\exists! d \in G : a = db$.

Означення. Кількість елементів групи називається її **порядком**. Група називається *скінченною* або *нескінченною* залежно від того, скінченний чи нескінченний її порядок.

Кількість елементів будь-якої множини M будемо позначати $|M|$, тож порядок групи теж позначатимемо $|G|$.

Означення. Нехай G — група, $a \in G$. Якщо існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $a^n = e$, то число $\text{ord } a = \min\{n \in \mathbb{N} : a^n = e\}$ називається *порядком* елемента a (у групі G). Якщо не існує такого $n \in \mathbb{N}$, що $a^n = e$, вважається, що $\text{ord}(a) = \infty$. Якщо $\text{ord}(a) < \infty$, то a називається *елементом скінченного порядку*; в іншому випадку a — *елемент нескінченного порядку*.

Зрозуміло, що при $|G| < \infty$, то для будь-якого елемента $a \in G$ виконується: $\text{ord}(a) < \infty$. Дійсно, за означенням операції, $\forall k \geq 1: a^k \in G$, тому кількість різних степенів елемента a скінченна. Відповідно, для деяких $l, m \in \mathbb{N}$ ($l > m$): $a^l = a^m$, тобто $a^{l-m} = e$. Отже, для кожного елемента скінченної групи існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $a^n = e$.

Також очевидно, що $\text{ord}(a) \leq |G|$, і якщо $\text{ord } a = n$, то $a^{n-1} = a^{-1}$.

В адитивній групі замість a^n пишуть na .

Означення. Підмножина $H \subset G$ називається *підгрупою* G , якщо H є групою відносно операції (тобто замкненою відносно цієї операції), заданої на G .

Кожна група G має дві *тривіальні* підгрупи: $\{e\}$ і G . Всі інші підгрупи (якщо вони існують) називаються *власними*.

У нескінченній групі можуть існувати елементи скінченного порядку. Наприклад, порядок нейтрального елемента будь-якої групи дорівнює 1.

Теорема. Нехай $(G, \cdot)$ — група, $H \subset G$. $(H, \cdot)$ — група тоді і тільки тоді, коли $\forall a, b \in H \quad ab^{-1} \in H$.

Наведемо кілька прикладів груп, які зустрічаються у криптології.

1. Група лишків за mod m ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$):

$Z_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ — група відносно операції $+$ mod m .

Часто операцію додавання за модулем позначають як $\oplus$.

Скінченні групи можна задавати у вигляді таблиці групової операції, або таблиці Келі.

Приклад. Таблиця Келі для $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ відносно операції додавання за модулем 5.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

2. Групи підстановок

Означення. Підстановкою скінченної множини M називається взаємно однозначне відображення $\pi: M \rightarrow M$.

Ототожнимо елементи множини M , кількість яких дорівнює n ($|M| = n$), з числами $1, 2, \dots, n$. Тоді підстановку можна записати як матрицю з двома рядками:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \text{ де } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ — переставлені якимось чином натуральні числа}$$

від 1 до n . Це означає, що при відображенні π елемент 1 відображається в елемент i_1 , елемент 2 — у i_2 і т. д. Будемо називати π підстановкою довжини n . Кількість таких підстановок дорівнює $n!$.

На множині підстановок довжини n можна ввести операцію множення таким чином: якщо у підстановці π_1 елемент k відображається (переходить) в елемент i , а у підстановці π_2 елемент i переходить в елемент j , то у підстановці $\pi_1 \cdot \pi_2$ елемент k переходить в елемент j . Наприклад,

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_1 \cdot \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неважко зрозуміти, що множина підстановок довжини n із заданою таким чином операцією утворює групу. (Довести!)

Групу підстановок довжини n називають симетричною (S_n) групою й інколи позначають σ_n .

3. Циклічні групи

Означення. Група G називається *циклічною* групою, якщо $\exists g \in G \quad \forall a \in G \quad \exists k \in \mathbb{Z}: a = g^k$.

Елемент g називають *твірним* (породжуючим, утворюючим) елементом групи G , або її *генератором*, а групу G — *циклічною групою, породженою елементом g* , і позначають як $G = \langle g \rangle$.

Наприклад, якщо $a \in G$, то всі неспівпадаючі елементи виду $a^k, k \in Z$ утворюють циклічну групу $\langle a \rangle$. Так, множина цілих чисел $(Z, +)$ є нескінченною циклічною групою, породженою одиницею $Z = \langle 1 \rangle$. Вірно також, що $Z = \langle -1 \rangle$. Очевидно, що інших твірних ця група не має. Чи є в неї власні циклічні підгрупи?

Контрольні запитання

- Скінченна група $(Z_5, +\text{mod}5)$ є також циклічною, її твірними є всі ненульові елементи. А чи є циклічною група $(Z_8, +\text{mod}8)$?
- Аналогічне питання для адитивної групи Z_n ? Якщо так, то яким елементом вона породжується?

Будь-яка нескінченна циклічна група G з твірним елементом a взаємоднозначно відображається на $(Z, +)$ відображенням $a^k \rightarrow k, k \in Z, a \in G$.

9.9.2. Властивості циклічних груп

Теорема 1. (про властивості циклічних груп). Нехай G — циклічна група, H — її підгрупа, a — твірний елемент групи G . Тоді справедливі наступні твердження:

1. Кожна підгрупа циклічної групи також є циклічною.

2. Нехай G скінченна, $|G| = m$. Тоді:

- $\text{ord}(a^k) = \frac{m}{(k, m)}$;
- для будь-якого натурального числа d , що є дільником числа m , група G містить:
 - єдину підгрупу порядку d ;
 - рівно $\varphi(d)$ елементів порядку d (де $\varphi(\cdot)$ — функція Ейлера): це елементи виду a^{kr} , де $k = \frac{m}{d}$ та $(r, d) = 1$; зокрема, існує рівно $\varphi(m)$ твірних елементів: це елементи виду a^r , де $(r, m) = 1$.

Приклад:

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10} = e\}$$

$$|\langle a \rangle| = 10.$$

Кількість твірних групи $\langle a \rangle$ дорівнює $\varphi(10) = 4$. Це елементи a, a^3, a^7, a^9 , всі вони мають порядок 10.

Тривіальні підгрупи: $\{e\}$ та $\langle a \rangle$; власні підгрупи: $\{a^2, a^4, a^6, a^8, e\}$ — підгрупа порядку 5, у ній $\varphi(5) = 4$ твірних та $\{a^5, e\}$ — підгрупа порядку 2, у ній $\varphi(2) = 1$ твірний.

Порядки всіх елементів ділять порядок групи. Кожен елемент є твірним деякої підгрупи.

Підгрупи, класи суміжності. Теорема Лагранжа

Розглянемо адитивну групу цілих чисел $(Z, +)$. Введемо класи лишків за модулем скінченим m , $m \in Z$; $mZ \in Z$; $Z = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [m-1]$; $mZ = [0]$. Вони утворюють адитивну групу лишків за модулем m , що позначається $\mathbb{Z}_m$:

$$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Має місце відношення еквівалентності $a, b \in [j] \Leftrightarrow a - b \in mZ \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

Узагальнення: $(G, +)$, $H < G$; $g \in G$, $g + H = \{g + h, h \in H\} = [g]$ — лівий клас суміжності за модулем підгрупи H . Аналогічно $H + g$ правий клас суміжності за модулем підгрупи H .

$$G = H \cup [g_1 + H] \cup [g_2 + H] \dots = H \cup [g_1] \cup [g_2] \dots$$

$$a, b \in [g] \Leftrightarrow a - b \in H \Leftrightarrow b - a \in H \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{H}$$

$$(G, \cdot), H < G; g \in G, g \cdot H = \{g \cdot h, h \in H\} = [g]$$

$$a, b \in [g] \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{H}$$

$$ab^{-1}, ba^{-1} \text{ — праві різниці, } a^{-1}b, b^{-1}a \text{ — ліві різниці.}$$

Теорема 2. Відношення $a \equiv b \pmod{H}$ є відношенням еквівалентності.

Теорема 3. (властивості класів суміжності). Нехай H — підгрупа групи G . Тоді справедливі наступні твердження:

1. Клас суміжності aH складається рівно з $|H|$ елементів, тобто кількість елементів кожного класу суміжності за підгрупою H однакова і $\forall a \in G: |aH| = |H|$. (Для нескінченного класу суміжності ми говоримо, що множини H і aH рівнопотужні.)
2. $\forall a, b \in G: aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$, тобто два лівих класи суміжності за підгрупою H співпадають тоді й тільки тоді, коли ліва різниця (або результат ділення) їх представників належить цій підгрупі H (аналогічно для правих класів).
3. $\forall a, b \in G$: або $aH = bH$, або $aH \cap bH = \emptyset$, тобто два класи суміжності за підгрупою або співпадають, або не перетинаються.

Означення. Якщо H — підгрупа групи G і кількість (різних) лівих суміжних класів групи G за підгрупою H скінченна, то *індексом* підгрупи H у групі G називається кількість різних суміжних класів групи G за підгрупою H . Індекс підгрупи H у групі G позначається $(G: H)$. Якщо кількість (різних) лівих суміжних класів G по H нескінченна, то $(G: H) = \infty$.

Приклад. $(Z: mZ) = m$.

Теорема 4. (теорема Лагранжа). Нехай G — скінченна група. Тоді $|G| = (G: H) \cdot |H|$.

Наслідок 1. Порядкок будь-якої підгрупи H групи G ділить порядкок групи G .

Наслідок 2. Порядкок елемента скінченної групи ділить порядкок групи.

9.9.3. Відображення груп. Нормальні підгрупи. Факторгрупи

При порівнянні структур двох груп важливу роль відіграють такі відображення, що зберігають групові операції.

Нехай $(H, \cdot)$, $(G, \times)$ — групи.

Означення 1. Відображення $f: H \rightarrow G$ називається:

- *гомоморфізмом*, якщо для будь-яких $h_1, h_2 \in H$: $f(h_1 \cdot h_2) = f(h_1) \times f(h_2)$;
- *ендоморфізмом*, якщо f — гомоморфізм і $H = G$;
- *мономорфізмом*, якщо f — гомоморфізм і ін'єкція;
- *епіморфізмом*, якщо f — гомоморфізм і сюр'єкція;
- *ізоморфізмом*, якщо f — гомоморфізм і бієкція;
- *автоморфізмом*, якщо f — ізоморфізм і $H = G$.

Нехай група H ізоморфна групі G і позначимо $H \cong G$, якщо існує відображення $f: H \rightarrow G$, яке є ізоморфізмом. При цьому, внаслідок бієктивності відображення f , існує обернене відображення $f^{-1}: G \rightarrow H$. Легко довести, що воно також є ізоморфізмом. Тому якщо H ізоморфна групі G , то G ізоморфна групі H . В цьому випадку кажуть, що групи G і H ізоморфні.

Поняття ізоморфізму та ізоморфних об'єктів є одним із центральних понять в алгебрі. Групи, що є ізоморфними, мають однакові (з точністю до позначень) таблиці Келі, і тому вважаються однаковими. Наприклад, кажуть, що існує єдина (з точністю до ізоморфізму) група порядку 2; існує єдина (з точністю до ізоморфізму) група порядку 3; існує єдина (з точністю до ізоморфізму) нескінченна циклічна група — це група цілих чисел з операцією додавання.

Приклад 1. Розглянемо групи $(Z, +)$, $(Z_n, \oplus)$ та відображення $f: Z \rightarrow Z_n$; $f(a) = a \bmod n$. Тоді

$$f(a + b) = (a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n = f(a) \oplus f(b),$$

отже, задане відображення є гомоморфізмом. Воно також є епіморфізмом, але не є ізоморфізмом.

Теорема 1. Якщо $f: H \rightarrow G$ — гомоморфізм, то $f(e_H) = e_G$ і $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, де під e_H та e_G розуміємо одиничні елементи груп H і G , відповідно, під a^{-1} розуміємо елемент групи H , обернений до елемента $a \in H$, а під $f(a)^{-1}$ розуміємо елемент групи G , обернений до елемента $f(a) \in G$.

Означення 2. Нехай $f: H \rightarrow G$ — гомоморфізм.

Ядром гомоморфізму f називається множина

$$\ker f = \{g \in G: f(g) = e_G\} \text{ (зрозуміло, що } e_G \in \ker f \text{)}.$$

Образом гомоморфізму f називається множина

$$\operatorname{Im} f = \{h \in H: \exists g \in G, f(g) = h\}.$$

Приклад 2. Розглянемо відображення $f: Z \rightarrow Z_n$, $f(a) = a \bmod n$. Тоді $\ker f = \{\text{всі числа, кратні } n\} = nZ$.

Означення 3. Підгрупа $H \subset G$ називається *нормальною* підгрупою групи G (або *нормальним дільником* групи G ; позначається $H \triangleleft G$), якщо $\forall h \in H \forall g \in G: ghg^{-1} \in H$ (або, що рівносильно, $g^{-1}Hg \subset H$).

Приклад 3. Нормальною є будь-яка підгрупа абелевої групи, а також ядро гомоморфізму груп.

Нехай і надалі H підгрупа деякої групи G . На множині (лівих) класів суміжності групи G за підгрупою H задамо наступну операцію:

$$(aH)(bH) = (ab)H. \quad (9.1)$$

Наступна теорема є надзвичайно важливою при подальшому вивченні алгебраїчних структур.

Теорема 2. Якщо H — нормальна підгрупа групи G , то множина (лівих) класів суміжності утворює групу відносно операції (9.1).

Для цієї теореми достатньо довести, що операція (9.1) задана коректно. Виконання інших умов, таких як асоціативність заданої операції, наявність одиничного елемента (e_H — одиничний елемент) та оберненого елемента відносно даної операції ($(aH)^{-1} = a^{-1}H$), а також замкненість відносно неї множини класів суміжності перевіряється тривіально.

Під коректністю операції розуміється: оскільки один клас суміжності можна отримати різними способами (за властивістю 2-х класів суміжності, $a_1H = a_2H \Leftrightarrow a_2^{-1}a_1 \in H$), необхідно довести, що операція (9.1) не залежить від того, як саме буде представлено клас суміжності.

Із теореми 2 випливає, що операцію над класами суміжності можна виконувати наступним чином:

- вибрати представника ah_1 класу aH ;
- вибрати представника bh_2 класу bH ;
- визначити, в який клас суміжності потрапить елемент ah_1bh_2 , і цей клас суміжності назвати результатом операції $(aH)(bH)$.

При цьому результат операції не залежатиме від вибору представників класів суміжності, тобто незалежно від вибору h_1 і h_2 буде виконуватись співвідношення $ah_1bh_2 \in abH$. Для доведення цього співвідношення достатньо довести, що $\exists h \in H: ah_1bh_2 = abh$, тобто $b^{-1}h_1bh_2 = h$. Але за означенням нормальної підгрупи $b^{-1}h_1b \in H$, відповідно $h = b^{-1}h_1bh_2 \in H$.

Така інтерпретація операції над класами суміжності дає можливість від операції над множинами (класами суміжності) перейти до операції над їх елементами. З кожного класу суміжності групи G за підгрупою H обираємо

по одному елементу; обрані елементи утворюють так звану *систему представників*. Для будь-якого $a \in G$ представник класу суміжності $[a]$ позначається $\bar{a}$. Далі від операції над класами суміжності переходимо до операції над їх представниками наступним чином: якщо $\bar{a} \in [a]$ та $\bar{b} \in [b]$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{c}$, де $\bar{c}$ — представник класу суміжності, що містить елемент.

Означення 4. Нехай H — нормальна підгрупа G . *Факторгрупою* групи G за підгрупою H називається група, утворена (лівими) класами суміжності, з операцією (9.1). Ця група позначається G/H .

Зауваження. Порядок факторгрупи G/H дорівнює кількості класів суміжності групи G за підгрупою H (індексу $(G:H)$ підгрупи H у групі G). Якщо $|G| < \infty$, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$, за теоремою Лагранжа.

Теорема 3. (про ізоморфізм груп):

1. Нехай $\varphi: G \rightarrow G_1$ — гомоморфізм груп. Тоді $\ker \varphi$ — нормальна підгрупа в G і $G/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi$. (Тобто факторгрупа за ядром гомоморфізму ізоморфна образу цього гомоморфізму.)

Приклад 4.

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \{a, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15} = e\}, \\ H &= \{a_3, a_6, a_9, a_{12}, e\}, \quad aH = \{a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, a\}, \\ a^2H &= \{a_5, a_8, a_{11}, a_{14}, a^2\}, \quad aHbH = (ab)H. \\ \langle a \rangle / H &= \{H, aH, a^2H\}, \quad (Z_3, \oplus) = \{0, 1, 2\}, \quad \langle a \rangle / H \cong (Z_3, \oplus). \end{aligned}$$

$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$

9.10. Скінченні поля і кільця

9.10.1. Кільця

Означення позначатимемо знаком $\blacklozenge$, початок і кінець доведення — відповідно значками $\blacktriangleright$ та $\blacktriangleleft$, а зауваження — знаком $\blacklozenge$.

$\blacklozenge$ **Кільце** R — це алгебраїчна структура з двома операціями, які умовно назвемо додаванням та множенням. При цьому:

1) відносно операції додавання R утворює абелеву групу (нейтральний елемент цієї групи позначається “0”, обернений до a — через “ $-a$ ”, який називається протилежним до a елементом);

2) відносно операції множення R утворює напівгрупу;

3) операції додавання та множення пов’язані законами дистрибутивності:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c, \\ c \cdot (a + b) &= c \cdot a + c \cdot b. \end{aligned}$$

◆ Кількість елементів кільця називають **порядком** кільця. Залежно від порядку кільце називається **скінченним** або **нескінченним**.

✧ Порядок скінченного кільця дорівнює порядку його адитивної групи.

◆ Групу $(R, +)$ називають **адитивною групою** кільця.

◆ Якщо в кільці R існує нейтральний елемент за множенням, то R називається **кільцем з одиницею**.

◆ Якщо операція множення в кільці R комутативна, то R називається **комутативним** кільцем.

◆ Нехай $a \in R$, $a \neq 0$. a називається **дільником 0**, якщо $\exists b \in R$, $b \neq 0$, що $a \cdot b = b \cdot a = 0$. Якщо виконується $a \cdot b = 0$, тоді a — **лівий дільник нуля**, якщо $b \cdot a = 0$, тоді a — **правий дільник нуля**.

◆ Елемент a кільця з одиницею R називається **дільником одиниці**, якщо існує такий елемент $b \in R$, що $ab = ba = 1$. Якщо виконується $a \cdot b = 1$, тоді a — **лівий дільник одиниці**, якщо $b \cdot a = 1$, тоді a — **правий дільник одиниці**.

◆ Елемент b називають **оберненням** до елемента a і позначають a^{-1} (відповідно **лівим** або **правим оберненням**).

Дільники одиниці також називаються **оборотними** елементами кільця.

Нуль кільця є необоротним елементом.

◆ Множина елементів кільця R з операцією додавання за означенням є абелевою групою, яка позначається $(R, +)$ і називається **адитивною групою кільця**. Порядок елемента цієї групи називається **адитивним порядком елемента кільця**.

◆ Множина оборотних елементів кільця R з операцією множення називається **мультиплікативною групою кільця R** і позначається R^* .

Порядок елемента даної групи (тобто порядок елемента кільця відносно операції множення) називається **мультиплікативним порядком елемента кільця**.

Приклади кілець:

1. $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ — множина дійсних чисел утворює поле відносно операцій додавання та множення.

2. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ — кільце цілих чисел.

3. $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ — комутативне кільце з одиницею, яке містить дільники нуля, якщо n — складене число.

4. Множина парних чисел з операціями додавання та множення утворює комутативне кільце без одиниці та без дільників нуля.

5. Множина функцій $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ утворює комутативне кільце з одиницею, в якому операції задані наступним чином:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

6. $(M_n, +, \cdot)$ — множина матриць розмірності $n \times n$ з операціями додавання і множення матриць утворює некомутативне кільце з одиницею та з дільниками нуля.

◆ **Характеристикою** кільця R називається таке $n_0 \in N$, що $n_0 = \min\{n \in N: nr = 0, \forall r \in R\}$.

Характеристика кільця R позначається $\text{char } R$; наприклад, у цьому означенні $\text{char } R = n_0$.

Якщо такого n_0 не існує, тобто $\forall n \in N \exists r \in R: nr \neq 0$, то вважається, що характеристика кільця дорівнює нулю, а кільце R називається кільцем характеристики 0 ($\text{char } R = 0$).

Тут і далі під позначенням nr , де n — натуральне число, а r — елемент кільця, розуміється елемент кільця, отриманий в результаті n -кратного додавання елемента r кільця: $nr = r + r + \dots + r$ (n разів).

✧ Якщо кільце з 1, то внаслідок дистрибутивності

$$r + r + \dots + r = r(1 + 1 + \dots + 1)$$

і $\text{char } R$ дорівнює порядку одиниці в адитивній групі кільця R .

◆ Комутативне кільце з одиницею без дільників нуля називається **цілісним кільцем** або **областю цілісності**.

◆ Область цілісності R називається **евклідовим кільцем**, якщо існує таке відображення ϕ множини ненульових елементів R у множину невід'ємних цілих чисел, що для будь-яких $a, b \in R, b \neq 0$ існують елементи $q, r \in R$ такі, що $a = qb + r$, причому $\phi(r) < \phi(b)$ або $r = 0$. Інакше кажучи, в R можливе ділення з лишком. Наприклад, кільце цілих чисел є евклідовим кільцем (достатньо визначити $\phi(a)$ як абсолютну величину числа a).

◆ Підмножина S кільця R називається **підкільцем**, якщо замкнене відносно операцій кільця R і S утворює кільце відносно цих операцій.

✧ Надалі в цьому параграфі під R будемо розуміти комутативне кільце з одиницею.

9.10.2. Ідеал кільця

◆ Підкільце J кільця R називається **ідеалом** цього кільця, якщо $\forall(a \in J, r \in R): a \cdot r \in J$ (підкільце J “витримує” множення на всі елементи кільця R).

◆ Ідеал J кільця R називається **головним**, якщо існує елемент $a \in R$ такий, що $J = \{a \cdot r \mid r \in R\}$, тобто складається з елементів, кратних a . Кажуть, що головний ідеал J **породжується** елементом a і позначають $J = (a)$.

◆ Цілісне кільце, в якому кожен ідеал є головним, називається **кільцем головних ідеалів**. Наприклад, кільце цілих чисел є кільцем головних ідеалів. Кожен ідеал J у ньому складається з чисел, кратних деякому цілому числу m , тобто $J = (m)$. Так, парні числа утворюють головний ідеал.

Кожен ідеал J кільця R визначає розбиття R на класи лишків за модулем ідеалу J . Клас лишків, що містить елемент a , позначатимемо $[a] = a + J$. Він складається з усіх елементів виду $a + c, c \in J$. Два елементи $a, b \in R$ належать одному класу лишків тоді і тільки тоді, коли $(a - b) \in J$.

✧ Класи лишків за модулем ідеалу J є нічим іншим, як класами суміжності адитивної групи кільця R за підгрупою $(J, +)$, адже J — підкільце R , а $(J, +)$ — підгрупа $(R, +)$. Множина класів лишків кільця R за модулем ідеалу J утворює кільце відносно операцій додавання та множення, що визначені наступним чином:

$$\begin{aligned}(a + J) + (b + J) &= (a + b) + J; \\ (a + J) \cdot (b + J) &= (a \cdot b) + J\end{aligned}\tag{9.2}$$

або, що те саме,

$$[a] + [b] = [a + b]; \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

◆ Кільце класів лишків кільця R за модулем ідеалу J з операціями, визначеними вище, називається **фактор-кільцем** кільця R за ідеалом J і позначається R/J .

Поняття гомоморфізму природним чином поширюється і на кільця.

◆ Відображення φ кільця R у кільце S називається **гоморфізмом**, якщо $\forall(a, b \in R): \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ та $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Таким чином, гомоморфізм φ зберігає обидві операції кільця R та індукує гомоморфізм адитивної групи кільця R в адитивну групу кільця S . Так само поширюються на кільця поняття епі-, ендो-, ізо- та автоморфізмів.

◆ Множина $\text{Ker } \varphi = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0 \in S\}$ називається **ядром** гомоморфізму φ .

Теорема 1. (про гоморфізм кілець)*. Якщо φ — гоморфізм кільця R на кільце S , то $\text{Ker } \varphi$ — ідеал кільця R і S ізоморфне фактор-кільцю $R / \text{Ker } \varphi$. Навпаки, якщо J — ідеал кільця R , то відображення $\psi: R \rightarrow R/J$, що визначається умовою $\forall(a \in R): \psi(a) = a + J$, є гомоморфізмом кільця R на R/J з ядром J .

Нагадаємо, що наразі розглядаються тільки комутативні кільця з одиницею.

Розглянемо ще дві властивості елементів комутативного кільця з одиницею:

◆ Елементи $a, b \in R$ називаються *асоційованими елементами* кільця R (позначають $a \sim b$), якщо існує такий оборотний елемент $\epsilon \in R$, що $a = \epsilon b$.

◆ Елемент $c \in R$ називається *простим*, якщо одночасно виконуються наведені умови:

- 1) c не є оборотним;
- 2) всі дільники c є або оборотними, або асоційованими з ним.

Контрольне запитання

Які елементи Z асоційовані? Які елементи Z прості?

* Ця теорема, а також поняття ядра гомоморфізму та фактор-кільця є узагальненням відповідних понять та теореми теорії груп.

9.10.3. Типи ідеалів

◆ Ідеал P кільця R (такий, що $P \neq R$) називається *простим*, якщо виконується умова: $\forall(a, b \in R): ab \in P \Leftrightarrow (a \in P) \vee (b \in P)$.

Означення. Ідеал M кільця R (такий, що $M \neq R$) називається *максимальним*, якщо для будь-якого ідеалу I кільця R виконується умова: якщо $M \subseteq I$, то або $M = I$, або $R = I$ (тобто в R немає ідеалу більшого за M , крім самого R).

Теорема 1. Нехай R — комутативне кільце з одиницею. Тоді:

- 1) ідеал $M \subset R$ — максимальний $\Leftrightarrow R/M$ — поле;
- 2) ідеал $P \subset R$ — простий $\Leftrightarrow R/P$ — цілісне кільце;
- 3) ідеал $P \subset R$ — максимальний $\Rightarrow$ ідеал $P \subset R$ — простий;
- 4) якщо R — кільце головних ідеалів, $c \in R$, то $R/(c)$ — поле $\Leftrightarrow c$ — простий елемент кільця R .

Зауваження. Властивості вихідного кільця можуть не переноситися на фактор-кільце. Наприклад, Z є цілісне кільце, кільце $Z/(n)$, де n не є простим, не є цілісним, а от $Z/(p)$ є не тільки цілісним кільцем, але й полем. Тобто факторизація кільця за ідеалом може як покращувати, так і погіршувати властивості кільця.

Зв'язок між кільцями та полями

Наступні дві теореми демонструють зв'язок між поняттями поля і цілісного кільця.

Теорема 2. Нехай R — поле. Тоді R — цілісне кільце.

► Достатньо довести, що в полі немає дільників нуля (тобто таких елементів $a, b \in R$, $a, b \neq 0$, що $a \cdot b = 0$). Нехай $a, b \in R$, $a, b \neq 0$ і при цьому $a \cdot b = 0$. Оскільки R — поле, то $\forall a \in R (a \neq 0) \exists a^{-1}$, тому, помноживши обидві частини останньої рівності на a^{-1} , отримаємо: $a^{-1}ab = eb = b = 0$, звідки $b = 0$, що призводить до суперечності. ◀

↻ Обернене твердження в загальному випадку невірне, але воно виконується у випадку скінченного кільця.

Теорема 3. Нехай $(R, +, \cdot)$ — скінченне цілісне кільце. Тоді $(R, +, \cdot)$ — поле.

► Нехай R — цілісне скінченне кільце. Позначимо $R' = R \setminus \{0\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ множину, що складається з n різних (ненульових) елементів кільця R ; зауважимо, що до цієї множини належить, зокрема, нейтральний елемент e кільця R . Покажемо, що для будь-якого елемента цієї множини існує обернений. Виберемо довільний елемент $a_i \neq 0$ і покажемо, що $\exists a_i^{-1}$: $a_i^{-1} a_i = e$. Для цього

розглянемо множину $a_i R' \{a_i a_1, \dots, a_i a_n\}$. Оскільки дане кільце не містить дільників нуля та замкнене відносно операції множення, то $a_i R' \subset R'$. Покажемо, що $|a_i R'| = |R'|$. Для цього достатньо показати, що всі елементи множини $a_i R'$ є різними. Якщо для деяких k, l ($1 \leq k < l \leq n$) виконується $a_i a_k = a_i a_l$, то, внаслідок закону дистрибутивності, $a_i (a_k - a_l) = 0$. Отже, $a_k - a_l = 0$ через відсутність дільників нуля, тобто $a_k = a_l$, що призводить до суперечності.

Оскільки R — скінченне, $a_i R' \subset R'$ та $|a_i R'| = |R'|$, то $a_i R' = R'$, а отже, $\exists a_j \in R: a_i a_j = e$. Унаслідок комутативності кільця також виконується $a_j a_i = e$. ◀

9.11. Кільця поліномів

9.11.1. Поліноми над кільцями

Нехай R — кільце, $x \notin R$ — деякий символ, змінна.

◆ **Поліномом над кільцем R** називається вираз виду

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

де елементи $a_i \in R$, $i = \overline{0, n}$ називаються **коефіцієнтами** полінома, a_0 називається **вільним членом** полінома.

◆ Якщо замість символу x у вираз для $f(x)$ підставити елемент $\alpha \in R$, то в R можна обчислити елемент $f(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha^i \in R$, який називається **значенням полінома** в α .

◆ Якщо $(\forall i = \overline{1, n}): a_i = 0$, то поліном називається **нульовим**. Якщо поліном f не нульовий, то існує $k \in [0, n]$ таке, що

$$\begin{cases} a_k \neq 0 \\ (\forall i > k): a_i = 0 \end{cases}$$

Число k , що задовольняє цій умові, називається **степенем** полінома f і позначається $\deg f$, a_k називається **старшим коефіцієнтом** полінома f . Степінь нульового полінома за означенням дорівнює $-\infty$.

◆ Поліном $f(x)$ **рівний** поліному $g(x)$ і позначають цей факт як $f(x) = g(x)$ тоді і тільки тоді, коли їх відповідні коефіцієнти рівні.

Введемо операції додавання і множення на множині поліномів над кільцем R . Нехай

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j, \quad a_i, b_j \in R, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}$$

і нехай для визначеності $m \leq n$. Тоді вважаємо

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i \quad (\text{отже, при } m < i \leq n \quad b_i = 0), \quad (9.3)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i, \quad \text{де } c_i = \sum_{\substack{j+k=i \\ 0 \leq j \leq m}} a_j b_k. \quad (9.4)$$

Теорема 4. Множина поліномів над кільцем R з введеними операціями додавання і множення утворює кільце з нульовим поліномом як нейтральним елементом за додаванням (нулем).
Це кільце позначають $R[x]$.

► Справедливість цієї теореми впливає з того, що коефіцієнти поліномів належать кільцю. ◀

Теорема 5. (про степені поліномів). Нехай $f(x), g(x) \in R[x]$, тоді:

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g),$$

$$\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g.$$

Якщо R — область цілісності, то $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Якщо $\deg f = 0$, то, очевидно, $f \in R$. Таким чином, R є підкільцем $R[x]$.

Кільце $R[x]$ успадковує багато властивостей кільця R .

Теорема 6:

- 1) якщо R — кільце з одиницею, то $R[x]$ кільце з одиницею;
- 2) якщо R — комутативне кільце, то $R[x]$ теж комутативне;
- 3) якщо R — область цілісності, то $R[x]$ теж цілісне.

9.11.2. Поліноми над полями

Нехай F — поле, $F[x]$ — кільце поліномів над F .

◆ Поліном $f(x) \in F[x]$ **ділиться** на поліном $g(x) \in F[x]$, якщо існує поліном $h(x) \in F[x]$ такий, що $f(x) = g(x)h(x)$ (цей факт будемо позначати як $g|f$ — “ g ділить f ”).

Так само, як і в кільці Z , у $F[x]$ можливе ділення з лишком.

Теорема 1. Множина поліномів $F[x]$ над полем F з операціями додавання та множення, визначеними рівностями (9.3), (9.4), утворює евклідове кільце, тобто $F[x]$ — область цілісності і якщо $f(x), g(x) \in F[x]$, то існують поліноми $q(x), r(x) \in F[x]$ такі, що $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, де $\deg r < \deg g$.

Приклад. Розглянемо приклад ділення з лишком поліномів з $Z_5[x]$:

$$\begin{array}{r}
 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 4 \quad | \quad 3x^2 + 2 \\
 \underline{2x^5 + 3x^3} \quad | \quad 4x^3 + x^2 + 4x + 3 \\
 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 4 \\
 \underline{3x^4 + 2x^2} \quad \\
 2x^3 + 4x^2 + 4 \\
 \underline{2x^3 + 3x} \quad \\
 4x^2 + 2x + 4 \\
 \underline{4x^2 + 1} \quad \\
 2x + 3.
 \end{array}$$

Тобто $2x^5 + 3x^4 + x^2 + 4 = (4x^3 + x^2 + 4x + 3)(3x^2 + 2) + 2x + 3$. Тут $q(x) = 4x^3 + x^2 + 4x + 3$, $r(x) = 2x + 3$. (Нагадаємо, що операції над коефіцієнтами виконуються за $\text{mod } 5$.)

◆ Поліном називається **нормованим** (зведеним, унітарним), якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

◆ Нормований поліном $d(x)$ називається **найбільшим спільним дільником** поліномів $f(x)$ і $g(x)$, якщо $d|f$, $d|g$ і $(\forall h: h|f, h|g): h|d$.

Теорема 2. Нехай $f_1, \dots, f_n \in F[x]$. Тоді існує єдиний нормований поліном, що є найбільшим спільним дільником поліномів $f_1, \dots, f_n$, причому він може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації:

$$d(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) f_i(x), \quad u_i(x) \in F[x].$$

◆ Нормований поліном називається **найменшим спільним кратним** поліномів $f(x)$ і $g(x)$, якщо $f|m$, $g|m$ і $(\forall h: f|h, g|h): m|h$.

Теорема 3. Кільце поліномів $F[x]$ є кільцем головних ідеалів, причому кожен ідеал цього кільця породжується нормованим поліномом.

► $F[x]$ — область цілісності (за теоремою 1 підрозділу 9.10.3). Розглянемо його довільний ненульовий ідеал A , який містить деякий поліном $h(x) \neq 0$ мінімального степеня. Нехай b — коефіцієнт при старшому степені $h(x)$, тоді маємо $g(x) = b^{-1}h(x)$. Покажемо, що $A = \langle g \rangle$, тобто $(\forall f \in A): f = s \cdot g$, $s \in F[x]$.

Оскільки $F[x]$ — евклідове кільце, то $(\forall f \in F[x]: \deg f \geq \deg g): f = sg + r$, $\deg r < \deg g$, $s \in F[x]$. Якщо $f, g \in A$, то і $r \in A$ оскільки $r = f - sg$ і A — підкільце. У разі, якщо $\deg r < \deg g$, де g — ненульовий поліном мінімального степеня, що належить A , маємо $r = 0$, тобто $(\forall f \in A): f = s \cdot g$, $s \in F[x]$. Отже, $A = \langle g \rangle$. ◀

Якщо в ідеалі є ненульові константи, то, очевидно, g дорівнює одиниці і $A = F[x]$.

◆ Поліном $f(x) \in F[x]$ називається **незвідним**, якщо $f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow h(x) = c$ або $g(x) = c$, $c \in F$.

Незвідний поліном не розкладається в добуток двох поліномів додатних степенів.

Звідність або незвідність полінома залежить від того, над яким полем він розглядається.

Приклади:

1. Поліном $x^2 - 2$ незвідний над полем раціональних чисел Q , але розкладається над полем дійсних чисел R :

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

2. Поліном $x^2 + x + 1$ незвідний над Z_2 , але розкладається над Z_3 :

$$(x^2 + x + 1) = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2.$$

Теорема 4. (про канонічний розклад). Будь-який поліном $f(x) \in F[x]$ представляється у вигляді

$$f(x) = af_1^{k_1}(x) \cdot \dots \cdot f_n^{k_n}(x),$$

де $a \in F, f_i(x) \in F[x], i = 1, \dots, n$ — нормовані незвідні поліноми; $k_1, \dots, k_n$ — натуральні числа.

9.11.3. Скінченні поля

◆ Полем F називається алгебраїчна структура з двома операціями: додаванням і множенням, що задовольняють умовам:

- 1) за додаванням F є абелевою групою;
- 2) за множенням усі ненульові елементи F також утворюють абелеву групу;
- 3) додавання і множення пов'язані законом дистрибутивності:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

З означення поля видно, що на відміну від комутативного кільця з одиницею, у полі кожен ненульовий елемент є оборотним.

Відомі нам поля: Q — поле раціональних чисел; R — поле дійсних чисел; C — поле комплексних чисел; Z_p , де p — просте число.

◆ **Порядок поля** — це кількість його елементів. Q, R, C — поля нескінченного порядку (нескінченні поля); Z_p — поле порядку p (скінченне поле).

◆ Говорять, що поле F є **підполем** поля K і позначають цей факт $F \subseteq K$, якщо носій поля F є підмножиною носія поля K , і F є полем відносно операцій, визначених у полі K .

◆ Якщо $F \subset K$, то підполе F називається **власним**. Якщо $F = K$, то — **невласним**.

◆ Поле K називається **простим**, якщо воно не містить власних підполів.

Теорема 1. Будь-яке поле містить одне і тільки одне просте підполе.

Теорема 2. Будь-яке просте поле ізоморфне або полю лишків за простим модулем Z_p , або полю раціональних чисел Q .

◆ Поле F має **характеристику**, що дорівнює p ($\text{char } F = p$), якщо F містить просте підполе, ізоморфне Z_p ($p \neq 0$, просте число), і характеристику, що дорівнює 0 ($\text{char } F = 0$), якщо F містить просте підполе, ізоморфне Q .

Теорема 3. У полі характеристики p

$$(\forall a, b \in F) \quad (a \pm b)^p = a^p \pm b^p.$$

► У будь-якому полі має місце формула бінома Ньютона:

$$(a + p)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + \dots + C_p^k a^{p-k} b^k + \dots + b^p, \quad (9.5)$$

де $C_p^k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$, $k = 1, \dots, p-1$. Оскільки p — просте число, а $k < p$,

то C_p^k ділиться на p при всіх $k = 1, \dots, p-1$. Але в полі характеристики p для будь-якого елемента $\theta \in F$. Отже, в правій частині (9.5) ненульовими можуть бути тільки крайні доданки.

Покладаючи в (9.5) $b = -b'$ отримуємо твердження для різниці елементів a і b . ◀

Наслідок. У полі характеристики $p \quad \forall (a, b \in F): (a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}$ для будь-якого натурального n .

► Доведення за індукцією. ◀

Зауваження. Теорема 3 та наслідок з неї справедливі не тільки для поля, а й для комутативного кільця характеристики p .

9.11.4. Розширення полів

◆ Поле K називається **розширенням** поля F , якщо $K \supseteq F$.

Нехай $K \supset F$. Розглянемо деяку множину елементів $\{\theta_i \in K \setminus F \mid i = \overline{1, n}\}$ (n — не обов'язково скінченне).

◆ Найменше поле, що містить F і елементи $\theta_1, \dots, \theta_n$, називається **розширенням F , одержаним шляхом приєднання елементів $\theta_1, \dots, \theta_n$** , і позначається $F(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

◆ Якщо розширення одержане приєднанням тільки одного елемента, то воно називається **простим**.

Приклад 1. Поле комплексних чисел C є простим розширенням поля дійсних чисел R , яке одержане приєднанням одного елемента — уявної одиниці.

◆ Нехай F — поле. Якщо множина L є абелевою групою з операцією додавання, визначена операція множення елементів F (скалярів) на елементи L (вектори), що не виводить за межі L , і для будь-яких $\xi, \eta \in L$, $a, b \in F$ виконуються умови:

- 1) $(a + b)\xi = a\xi + b\xi$;
- 2) $a(\xi + \eta) = a\xi + a\eta$;
- 3) $(ab)\xi = a(b\xi)$;
- 4) $1 \cdot \xi = \xi$,

тоді L називається **лінійним векторним простором** над F .

Теорема 1. Будь-яке розширення поля F є лінійним векторним простором над F .

► Розширення, як і будь-яке поле, є абелевою групою за додаванням. Неважко також бачити, що умови 1–4 виконуються. ◀

◆ Система елементів розширення $K \supseteq F \{ \xi_i \in K \mid i \in M \}$ (M — скінченна або нескінченна множина натуральних індексів), для якої виконується умова називається **базисом** K над F .

◆ Якщо в розширенні K поля F існує базис зі скінченною кількістю елементів, то K називається **скінченим розширенням** F .

◆ Розмірність K як лінійного векторного простору над полем F називається **степенем розширення** K і позначається $[K : F]$.

Приклад 2. $[C : R] = 2$, оскільки будь-яке комплексне число $a + ib$ можна зобразити як двовимірний вектор (a, b) , $a, b \in R$. Базисом C над R є система елементів $\{1, i\}$.

Будь-яке скінченне поле F є скінченим розширенням свого простого підполя Z_p . Його елементи можна представити як вектори деякої розмірності n з компонентами з Z_p :

$$(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0), a_i \in Z_p.$$

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 2. Будь-яке скінченне поле містить p^n елементів, де p — деяке просте, а n — натуральне числа.

Так, p є характеристикою, а n — степенем розширення поля F над простим підполем Z_p .

◆ Скінченні поля називають **полями Галуа** (Galois Fields) і позначають F_{p^n} або $GF(p^n)$, де p^n — кількість елементів поля.

Так, порядок F_{p^n} дорівнює p^n .

✎ Надалі замість Z_p будемо використовувати позначення F_p .

9.11.5. Операції у скінченному полі

Поле F_2 є простим полем, $F_2 = \{0, 1\}$. Розглянемо приклад не простого поля. Найменшим з таких полів є $F_4 = F_2^2 = F_2 \times F_2$ — поле характеристики 2 зі степенем розширення 2. Елементами цього поля є вектори розмірності 2 з компонентами з простого підполя F_2 :

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).$$

Додаються елементи F_4 покомпонентно, а компоненти додаються за правилами поля F_2 , тобто за модулем 2.

Щоб перемножити елементи F_4 , їх треба спочатку представити у вигляді поліномів над F_2 (у загальному випадку елементу поля $F_{p^n}(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$, де $a_i \in F_p$, підставляється поліном $a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in F_p[x]$). Отже,

$$\begin{aligned}(0, 0) &\sim 0x+0, \\(0, 1) &\sim 0x+1, \\(1, 0) &\sim x+0, \\(1, 1) &\sim x+1.\end{aligned}$$

Ці поліноми можна перемножувати як елементи кільця $F_2[x]$. Проте, перемноживши два останніх поліноми, отримаємо поліном другого степеня, а таких елементів у полі F_4 немає. За аналогією із Z_m візьмемо добуток за модулем деякого полінома другого степеня. Адже лишок від ділення на поліном другого степеня буде мати степінь, менший за 2, а саме всі можливі поліноми таких степенів над F_2 складають поле F_4 . Проте не кожен поліном другого степеня над F_2 може бути модулем. Для цього необхідно, щоб цей поліном був простим елементом кільця $F_2[x]$ (див. теорему 1, п. 9.11.1), яке, як ми знаємо, є кільцем головних ідеалів (теорема п. 9.11.2). **Простими елементами** кільця поліномів над полем є **незвідні** поліноми над даним полем. Отже, для визначення операції множення у полі F_4 потрібен незвідний поліном другого степеня над F_2 . Це поліном $x^2 + x + 1$ (це єдиний такий поліном).

Таким чином, операції додавання та множення у полі F_4 можна задати такими таблицями Келі:

Додавання

+	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

Множення елементів скінченного поля для незвідного полінома мінімального степеня (мінімального полінома) $x^2 + x + 1$

$\times$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Для прикладу порахуємо

$$\begin{aligned}(x+1)(x+1) &= (x+1)^2 = x^2 + 0 + 1 \bmod (x^2 + x + 1) = x^2 + 1 \bmod (x^2 + x + 1): \\&\begin{array}{r} x^2 \quad + 1 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ - x^2 + x + 1 \quad | \quad 1 \\ \hline x \end{array}.\end{aligned}$$

Приклад 2.
$$\begin{array}{r} x^2 + x \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ - x^2 + x + 1 \quad | \quad 1 \\ \hline 1 \end{array}.$$

Отже, наведені таблиці задають не що інше, як операції у фактор-кільці $F_2[x]/(x^2 + x + 1)$. Тож зрозумілою стає наступна теорема.

Теорема. Скінченне поле F_{p^n} ізоморфне фактор-кільцю $F_p[x]/(f(x))$, де $f(x)$ — деякий незвідний над F_p поліном степеня n .

Зазвичай існує не один незвідний поліном степеня n над F_p , але при будь-якому такому поліномі f фактор-кільце $F_p[x]/(f(x))$ ізоморфне F_{p^n} , і, відповідно, всі вони ізоморфні і між собою.

9.11.6. Корені поліномів. Незвідні поліноми

Із наведеного вище прикладу зрозуміло, що для побудови поля F_{p^n} (а саме, завдання операції множення у ньому, бо з операцією додавання все зрозуміло) необхідно мати незвідний поліном степеня n над F_p . Існування незвідних поліномів будь-якого степеня над заданим скінченним полем буде доведено пізніше. Знаходження незвідного полінома над скінченним полем загалом є непростою задачею. Проте для маленьких степенів n це зробити неважко. Спочатку розглянемо деякі поняття і теореми.

Нехай F — поле, $f(x) \in F[x]$ — деякий поліном. Якщо $x = a \in F$, то елемент $f(a) \in F$ є значенням полінома F в a .

◆ Елемент $a \in F$ такий, що $f(a) = 0$, називається **коренем** полінома f .

Теорема 1 (Безу). Елемент $a \in F$ є коренем деякого полінома $f(x) \in F[x]$ тоді і тільки тоді, коли $(x - a) \mid f(x)$.

► *Необхідність.* Нехай $(x - a) \mid f(x)$. Тоді $f(x) = (x - a)h(x) \Rightarrow f(a) = 0$.

Достатність. Нехай a — корінь $f(x)$. Внаслідок того, що $F[x]$ — евклідове кільце, маємо: $f(x) = g(x)(x - a) + r(x)$, причому $\deg r < \deg(x - a)$. Але $\deg(x - a) = 1$, тобто $\deg r = 0 \Rightarrow r = c \in F$. Якщо $x = a$, то $f(a) = r = c$. Але оскільки a — корінь, то $r = c = 0$ і $(x - a) \mid f(x)$. ◀

Теорема 2. Поліном $f(x)$ степеня n над полем F має не більше за n різних коренів.

◆ a називається **коренем полінома $f(x)$ кратності k** , якщо $f(x)$ ділиться на $(x - a)^k$, але не ділиться на $(x - a)^{k+1}$.

◆ Якщо кратність кореня дорівнює 1, то він називається **простим**.

9.11.7. Алгебраїчні розширення

◆ Елемент $\theta \in K \supseteq F$ називається **алгебраїчним** над F , якщо він є коренем деякого полінома з $F[x]$.

Приклад 1.

Уявна одиниця $i \in C$ є алгебраїчним над R елементом, оскільки є коренем полінома $x^2 + 1 \in R[x]$. Цей корінь не лежить в R , але лежить в його розширенні C .

◆ Розширення поля F називається **алгебраїчним** над F , якщо всі його елементи — алгебраїчні над F .

Теорема 1. Кожне скінченне розширення K поля F є алгебраїчним над F .

► Нехай $[K : F] = n$, θ — довільний елемент K . Система елементів $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^n$ як і кожна система з $n + 1$ елементів, повинна бути лінійно залежною. За визначенням лінійної залежності існує ненульовий набір коефіцієнтів $a_0, \dots, a_n \in F$ таких, що $a_0 \cdot 1 + a_1 \theta + \dots + a_n \theta^n = 0$.

А це і означає, що θ є коренем деякого полінома над F . ◀

Нехай $\theta \in K \supseteq F$ — алгебраїчний елемент над F , що є розширенням K , причому $\theta \notin F$. Нескладно показати, що множина $J = \{f(x) \in F[x] \mid f(\theta) = 0\}$ є ідеалом кільця $F[x]$, причому $J \neq 0$, так як θ — алгебраїчний елемент. Оскільки $F[x]$ — кільце головних ідеалів, то $J = (g)$, де g — нормований поліном над F найменшого степеня серед ненульових поліномів, що належать J . Доведемо незвідність g . Оскільки $g(\theta) = 0$, то $g \neq c \in F, c \neq 0$. Таким чином, $\deg g > 0$. Припустімо, що поліном g — звідний. Тоді $g = h_1 h_2$; $g(\theta) = 0 \Rightarrow h_1(\theta) = 0$ або $h_2(\theta) = 0 \Rightarrow h_1(\theta) \in J$ або $h_2 \in J$. Оскільки $\deg h_{1,2} < \deg g$, то це входить у протиріччя з мінімальністю степеня g у J .

◆ Поліном g , що породжує ідеал $(g) = \{f(x) \in F[x] \mid f(\theta) = 0\}$, називається **мінімальним поліномом** елемента θ .

У розглянутому випадку для $\theta \in F$ мінімальним буде поліном $g = x - \theta$.

Отже, кожний алгебраїчний елемент розширення $K \supseteq F$ має мінімальний поліном над F .

◆ Степінь мінімального полінома елемента θ називається **степенем** цього елемента.

Наведені міркування повністю доводять наступну теорему.

Теорема 2. Нехай K — розширення поля F , елемент $\theta \in K$ — алгебраїчний над F . Тоді θ має мінімальний поліном g , причому:

- 1) g — незвідний поліном;
- 2) $(\forall f \in F[x] : f(\theta) = 0) : g \mid f$;
- 3) g є нормованим поліномом мінімального степеня, для якого θ є коренем.

Критерій підполя, діаграми включення підполів

Теорема 3. (критерій підполя). Кожне підполе скінченного поля F_{p^n} складається з p^m елементів, де $m \mid n$, і навпаки: для кожного нату-

рального m , що ділить n , існує підполе K скінченного поля F_{p^n} , яке складається з p^m елементів.

Для будь-якого скінченного поля можна побудувати діаграму, в якій вказані всі його підполя та ієрархія їх включення одного в одне.

Приклад 2. Побудуємо діаграму включення підполів поля $F_{2^{30}}$. Як зміниться відповідь для $F_{p^{30}}$ та $F_{2^{45}}$?

Для кожного дільника m числа 30 за теоремою 3 існує підполе порядку 2^m , і інших підполів не існує. Розглядаючи всі дільники 30, розташовуємо підполя в діаграмі так, щоб кожне поле було підполем всіх полів, розташованих вище за нього і пов'язаних з ним будь-яким шляхом із рисок.

Щоб знайти всі дільники числа 30 і розташувати їх в ієрархічному порядку, де кожне число на нижчому рівні є дільником деякого числа на більш високому рівні, розкладемо 30 на прості дільники: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Найбільші дільники, які не ділять один одного, отримуємо поділивши 30 на один простий дільник: $30/5 = 2 \cdot 3 = 6$, $30/3 = 2 \cdot 5 = 10$, $30/2 = 3 \cdot 5 = 15$. Наступний рівень отримуємо, поділивши 30 на всі добутки по 2 простих дільника — це $30/(3 \cdot 5) = 2$, $30/(2 \cdot 5) = 3$, $30/(2 \cdot 3) = 5$. І, нарешті, найнижчий рівень складається з одного числа $30/(2 \cdot 3 \cdot 5) = 1$. Отже, діаграма включення підполів поля $F_{2^{30}}$ має такий вигляд (рис. 106):

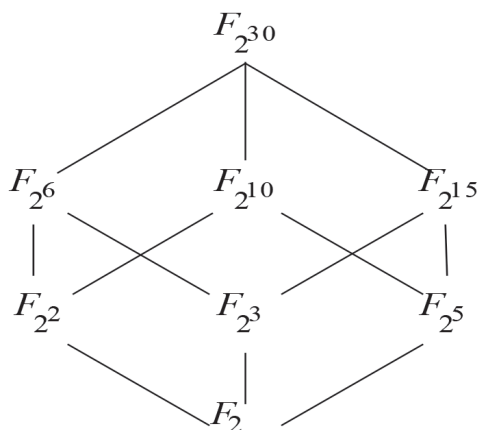


Рис. 106

Незвідні поліноми та їх корені

Твердження. Для кількості $k(n)$ незвідних нормованих многочленів ступеня n над F_p має місце формула Вітта над F_p :

$$k(n) = \frac{p^n - p}{n}.$$

Теорема 4. Кількість нормованих незвідних многочленів ступеня n над F_p дорівнює:

$$\frac{1}{n} \sum_{m|n} p^{\frac{n}{m}} \mu(m),$$

де підсумовування ведеться за всіма додатними дільниками числа n , $\mu(m)$ — функція Мебіуса:

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 1 \\ (-1)^k, & \text{якщо } m \text{ — добуток } k \text{ різних простих чисел} \\ 0, & \text{якщо } m \text{ ділиться на квадрат деякого простого} \end{cases}$$

Приклад 3. Кількість нормованих незвідних поліномів ступеня 6 над F_5 дорівнює:

$$\frac{1}{6} \sum_{m|6} 5^{\frac{6}{m}} \mu(m) = \frac{1}{6} [5^6 \cdot 1 + 5^3 \cdot (-1) + 5^2 \cdot (-1) + 5 \cdot 1] = 2580, \text{ тут маємо } k = 1.$$

✧ Надалі часто позначатимемо p^n через q .

Теорема 5. Якщо $f \in F_q[x]$ — незвідний поліном ступеня m , то всі його корені лежать у полі F_{q^m} і ними є m різних елементів $\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \dots, \alpha^{q^{m-1}}$ поля F_{q^m} .

◆ Нехай $\alpha \in F_{q^m}$. Елементи $\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \dots, \alpha^{q^{m-1}}$ називаються **спряженими** з α відносно поля F_q .

Отже, корені незвідного полінома ступеня m над F_q є елементами поля F_{q^m} , спряженими відносно F_q .

Теорема 6. Елементи, спряжені з $\alpha \in F_q^*$ відносно довільного підполя, мають однаковий порядок у мультиплікативній групі F_q^* .

Приклад 4. Побудова F_{2^3} над полем F_2 .

Нехай $F_8 \cong F_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$, α — корінь полінома $x^3 + x^2 + 1$.

(PB)			(NB)	Tr
(0, 0, 0)	0		(0, 0, 0)	
(0, 0, 1)	1	α^7	(1, 1, 1)	
(0, 1, 0)	α	α	(1, 0, 0)	1
(0, 1, 1)	$\alpha + 1$	α^5	(0, 1, 1)	0
(1, 0, 0)	α^2	α^2	(0, 1, 0)	
(1, 0, 1)	$\alpha^2 + 1$	α^3	(1, 0, 1)	
(1, 1, 0)	$\alpha^2 + \alpha$	α^6	(1, 1, 0)	
(1, 1, 1)	$\alpha^2 + \alpha + 1$	α^4	(0, 0, 1)	1

1. Після цього побудувати поле, отримане за допомогою розширення побудованого на основі мінімального полінома, $\mu(x) = x^3 + x^2 + 1$.

Розв'язання. Таблиці додавання та множення для полів F_{2^3} (табл. 1–3).

Таблиця 1

Додавання (універсальне) на основі мінімального полінома
 $(M_{11}(x) = x^3 + x^2 + 1 \text{ так і } M_{10}(x) = x^3 + x + 1)$

+	0	1	α	α^2	$\alpha^2 + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$
0	0	1	α	α^2	$\alpha^2 + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$
1	1	0	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + 1$	α^2	α	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$
α	α	$\alpha + 1$	0	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + 1$	β^2	1
α^2	α^2	$\alpha^2 + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	0	1	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\beta + 1$	α
$\alpha^2 + 1$	$\alpha^2 + 1$	α^2	$\alpha^2 + \alpha + 1$	1	0	$\alpha^2 + \alpha$	β	$\alpha + 1$
$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α	$\alpha^2 + 1$	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	0	1	α^2
$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$	β^2	$\alpha + 1$	α	1	0	$\alpha^2 + 1$
$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	1	A	$\alpha + 1$	α^2	$\alpha^2 + 1$	0

Таблиця 2

Множення на основі мінімального полінома $(M_{11}(x) = x^3 + x^2 + 1)$

$\times$	0	1	α	α^2	$\alpha^2 + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2	$\alpha^2 + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α	0	α	α^2	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$	1	$\alpha^2 + 1$
α^2	0	α^2	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	1	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + 1$	α
$\alpha^2 + 1$	0	$\alpha^2 + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	1	α	α^2	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha + 1$
$\alpha + 1$	0	$\alpha + 1$	$\alpha^2 + \alpha$	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + 1$	1	α	α^2
$\alpha^2 + \alpha$	0	$\alpha^2 + \alpha$	1	$\alpha^2 + 1$	$\alpha + 1$	α	$\alpha^2 + \alpha + 1$	α^2
$\alpha^2 + \alpha + 1$	0	$\alpha^2 + \alpha + 1$	$\alpha^2 + 1$	α	α^2	$\alpha + 1$	α^2	1

Таблиця 3

Множення на основі мінімального полінома $(M_{10}(x) = x^3 + x + 1)$

$\times$	0	1	β	β^2	$\beta^2 + 1$	$\beta + 1$	$\beta^2 + \beta$	$\beta^2 + \beta + 1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	β	β^2	$\beta^2 + 1$	$\beta + 1$	$\beta^2 + \beta$	$\beta^2 + \beta + 1$
β	0	β	β^2	$\beta + 1$	$\beta^2 + \beta$	$\beta^2 + \beta + 1$	1	$\beta^2 + 1$
β^2	0	β^2	$\beta + 1$	$\beta^2 + \beta$	1	$\beta^2 + \beta + 1$	$\beta^2 + 1$	β
$\beta^2 + 1$	0	$\beta^2 + 1$	$\beta^2 + \beta$	1	β	β^2	$\beta + 1$	$\beta^2 + \beta + 1$
$\beta + 1$	0	$\beta + 1$	$\beta^2 + \beta$	$\beta^2 + \beta + 1$	$\beta^2 + 1$	1	β	β^2
$\beta^2 + \beta$	0	$\beta^2 + \beta$	1	$\beta^2 + 1$	$\beta + 1$	α	$\beta^2 + \beta + 1$	β^2
$\beta^2 + \beta + 1$	0	$\beta^2 + \beta + 1$	$\beta^2 + 1$	β	β^2	$\beta + 1$	β^2	1

2. Знайти всі точки над полем F_8 , які задовольняють рівнянню кривої:

$$y^2 + xy = x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha^5.$$

9.11.8. Примітивні елементи у скінченному полі

Примітивним називається елемент, який породжує всю мультиплікативну групу поля.

Задача. Знайти степені 2, які є примітивними елементами в простому скінченному полі характеристики 5.

Розв'язання. Порядок мультиплікативної групи в полі F_5 рівний 4. Загалом елементи степені двійки породжують всю мультиплікативну групу $2^1 \equiv 2 \pmod{5}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{5}$, $2^3 \equiv 3 \pmod{5}$, $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$. Але для знаходження елементів, які є саме примітивними елементами в мультиплікативній групі F_5^* ми повинні перевірити взаємпростоту елемента з модулем $\phi(p-1)$. Оскільки $\phi(5-1) = 2$, то елементи з F_5^* , що є взаємно простими з модулем 2, є лише 1 і 3. А саме серед елементів, які є степенями 2, ними будуть $2^1 \equiv 2 \pmod{5}$ і $2^3 \equiv 3 \pmod{5}$, бо взаємно простими з 2 є показники їх степенів — це 1 і 3. Також зауважимо що є інший спосіб, оскільки 5 — це число Ферма, то примітивними будуть елементи, які є квадратичними лишками в F_5 , тобто це 1 і 3, бо $3^2 \equiv 4 \pmod{5}$.

Задача. Знайти степені 3, які є примітивними елементами в простому скінченному полі характеристики 5.

Відповідь: $3^1 \equiv 3 \pmod{5}$ і $3^3 \equiv 2 \pmod{5}$, бо 1 і 3 взаємно прості з $\phi(4) = 2$.

9.12. Еліптичні криві

Еліптичні криві — це математичні об'єкти, які добре вивчені в алгебраїчній геометрії, але порівняно нещодавно почали застосовуватись у криптографії. З точки зору криптографії і будемо їх розглядати.

Еліптична крива розглядається над будь-яким полем F . Вона описується рівнянням від двох змінних x та y : по y — другого степеня, по x — третього. Загальний вигляд рівняння еліптичної кривої:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6. \quad (9.6)$$

Коефіцієнт a_5 відсутній, бо коефіцієнти, що знаходяться у лівій частині рівняння, прийнято позначати непарними індексами, а ті, що знаходяться справа — парними. Точкою будемо називати пару елементів (x, y) , де $x, y \in F$, а x та y — координатами точки (за аналогією із точкою на площині).

Означення 1. *Еліптичною кривою над полем F називається множина точок, що задовольняють рівнянню (9.6) разом з фіктивною точкою, що називається точкою на нескінченності і позначається O_E .*

Що ж таке точка на нескінченності і навіщо вона потрібна? Справа в тому, що точки еліптичної кривої з певною операцією додавання мають утворюва-

ти абелеву групу, тому що велика кількість асиметричних криптосистем побудовані саме на абелевих групах. Це дає можливість переносити такі криптосистеми на групи точок еліптичних кривих, причому їх стійкість суттєво підвищується. У будь-якій групі повинен бути нейтральний елемент. Саме точка на нескінченності i є нейтральним елементом (нулем). Вважається, що у точки на нескінченності координат немає, хоча інколи говорять, що вона має координати $O_E(\infty, \infty)$.

Надалі замість “еліптична крива” писатимемо скорочено ЕК.

Еліптичні криві бувають сингулярними та несингулярними. Нас будуть цікавити *несингулярні* криві (інша назва — *гладкі криві*), тобто криві без зломів та самоперетинів. У рівнянні ЕК (9.6) перенесемо всі доданки у ліву сторону та позначимо це як $F(x, y)$:

$$F(x, y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6.$$

Умова гладкості (несингулярності) ЕК формулюється наступним чином:

- часткові похідні функції $F(x, y)$ по x та y не дорівнюють нулю одночасно в жодній точці кривої, тобто $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \neq 0$ або $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$ у всіх точках ЕК (звісно, крім точки O_E , де похідні не визначені).

Загальне рівняння еліптичної кривої достатньо громіздке, але у полях певних характеристик його шляхом заміни змінних можна привести до більш простого виду. Розглянемо можливі випадки:

1. $\text{char} F \neq 2, 3$.

(Тут $\text{char} F$ — характеристика поля F). У цьому випадку рівняння ЕК набуває вигляду:

$$y^2 = x^3 + ax + b. \quad (9.7)$$

Існує поняття дискримінанта кривої. Крива буде гладкою, якщо її дискримінант ненульовий, тобто крива не має співпадаючих точок (аналогія з квадратним рівнянням: дві точки (два корені) співпадуть, якщо дискримінант дорівнює 0). Більш детально поняття дискримінанта буде розглядатися у курсі “Криптосистеми на еліптичних кривих”. Для нас важливо, що умова гладкості виражається через коефіцієнти рівняння (9.7) таким чином:

$$4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

2. $\text{char} F = 2$

У такому випадку неможливо звести рівняння кривої до одного конкретного виду, але можливо до одного з двох:

$$1) y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b;$$

$$2) y^2 + y = x^3 + ax + b.$$

ЕК, що описуються рівнянням 1) називаються *несуперсингулярними*, в той час як ЕК з рівняння 2) називаються *суперсингулярними*.

Умова гладкості для несуперсингулярних кривих: $b \neq 0$.

Для суперсингулярних кривих умова гладкості виконується автоматично, тобто будь-яка суперсингулярна крива буде несингулярною.

3. $\text{char } F = 3$

У цьому випадку рівняння ЕК зводиться до виду:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Умова гладкості: права частина рівняння кривої не має кратних коренів.

У криптографії використовуються або еліптичні криві над простими полями (полями виду F_p , причому $p \neq 2$ або 3) або над полями характеристики 2 (поля виду F_{2^m}). ЕК над полями характеристики 3 поки що не використовуються на практиці.

Розглянемо для прикладу ЕК над полем дійсних чисел R . Так як $\text{char } R = 0$, то згідно з (9.7) їх рівняння має вигляд:

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

У цьому випадку ЕК дійсно може бути зображена як крива на площині і може мати один із видів, зображених на рис. 107–110.

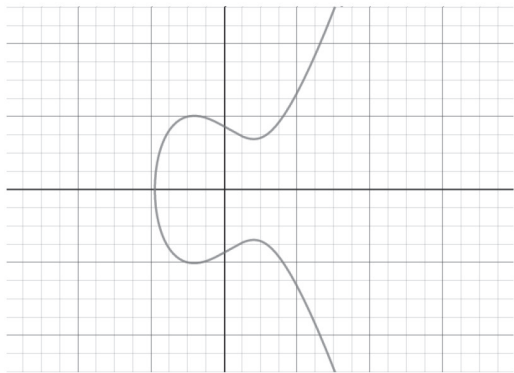


Рис. 107

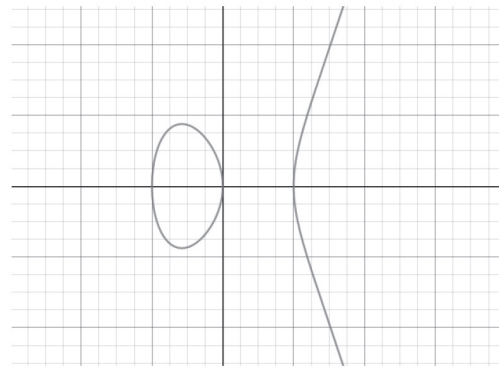


Рис. 108

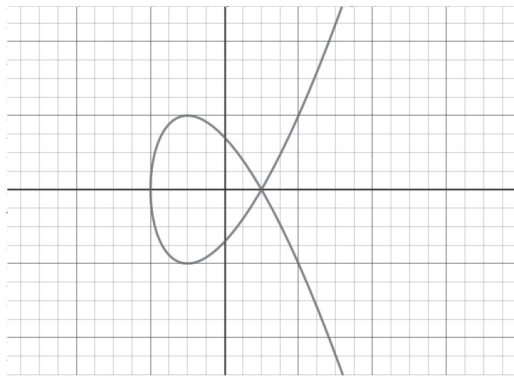


Рис. 109

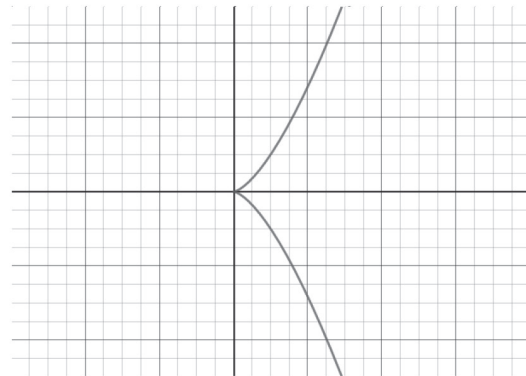


Рис. 110

Криві, зображені на рис. 107–108, є несингулярними (гладкими), а на рис. 109–110 — сингулярними (на рис. 109 — з самоперетином, на рис. 110 — зі зломом).

Часто конкретну еліптичну криву позначають E , а якщо потрібно уточнення, над яким полем задана еліптична крива, то пишуть E/F . Точки кривої зазвичай позначають великими латинськими літерами, найчастіше P, Q, R, S .

Операція додавання точок ЕК над полем R вводиться з геометричних міркувань наступним чином:

1. Нейтральний елемент групи:

покладемо $P + O_E = O_E + P = P$ для будь-якої точки $P = (x, y) \in E/R$.

2. Протилежні елементи:

покладемо $-O_E = O_E$;

Оскільки входить у рівняння (9.7) лише в другому степені, то з $P \in E$ випливає, що $-P \in E$ — графік кривої симетричний відносно осі Ox .

3. Якщо $P = -Q$, то $Q + P = -P + P = O_E$. (Якщо точка O_E лежить на нескінченності в додатному напрямі осі Oy , то природно вважати її третьою точкою перетину з E вертикальною прямою, що проходить через точки $P, -P$.)

4. Якщо $Q \neq \pm P$, то через точки P і Q проведемо січну. Неважко показати, що вона перетне E також ще в одній точці, якщо тільки січна не виявиться дотичною у точці P або Q . Позначимо цю точку R . Якщо ж пряма, що проходить через точки P і Q , є дотичною в P , то покладемо $R = P$ (рис. 108), якщо ж в Q — то $R = Q$. У будь-якому із цих випадків покладемо $P + Q = -R$ (рис. 111, 112).

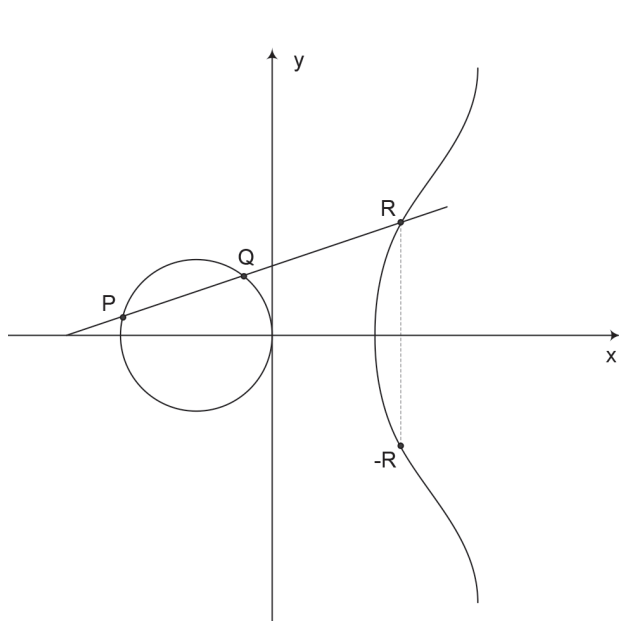


Рис. 111

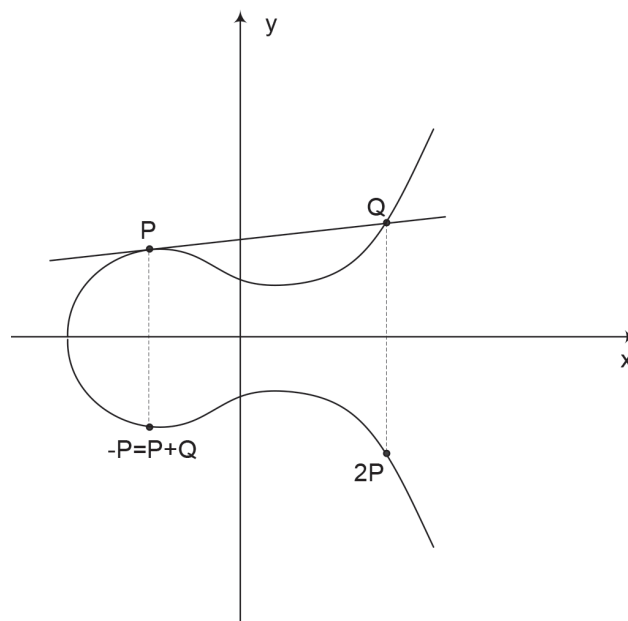


Рис. 112

5. Нехай $P = Q$. Проведемо в точці P дотичну до E і позначимо R — точку перетину цієї дотичної з E . Тоді $P + Q = 2P = -R$. Якщо ж точки R не існує, то P — точка перегину і покладемо $2P = -P$.

Виразимо тепер координати суми $P + Q$ через координати точок P і Q .

Нехай $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $P + Q = (x_3, y_3)$, $x_1 \neq x_2$ (тобто $Q \neq \pm P$).

$y = \alpha x + \beta$ — рівняння січної, що проходить через точки P і Q .

Таким чином,

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta, \\ y_2 = \alpha x_2 + \beta \end{cases} \quad (9.8)$$

звідки $\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $\beta = y_1 - \alpha x_1$.

Точка, що лежить на січній, має координати $(x, \alpha x + \beta)$. Якщо точка лежить також і на E , то її координати задовольняють рівняння (9.8):

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta)^2 &= x^3 + ax + b, \quad \text{або} \\ x^3 - \alpha^2 x^2 + (a - 2\alpha\beta)x + b - \beta^2 &= 0.\end{aligned}\tag{9.9}$$

Так як точки P, Q лежать одночасно на січній і на E , то x_1, x_2 є коренями рівняння (9.9). Третім коренем цього рівняння є x_3 — координата точки R . За теоремою Вієта $x_1 + x_2 + x_3 = \alpha^2$. Отже,

$$\begin{aligned}x_3 &= \alpha^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 &= -(\alpha x_3 + \beta) = -y_1 + \alpha(x_1 - x_3).\end{aligned}$$

(Не слід забувати, що y_3 — це координата точки R .)

Для координат точки $2P = (x_3, y_3)$ формули дещо відрізняються. А саме,

α — кутовий коефіцієнт дотичної в точці P : $\alpha = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_P$.

Із (9.7) маємо:

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_P = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}.\tag{9.10}$$

Отже, для $2P$:

$$\begin{aligned}x_3 &= \alpha^2 - 2x_1, \\ y_3 &= -y_1 + \alpha(x_1 - x_3),\end{aligned}$$

де α визначається формулою (9.10).

Випишемо остаточні формули для обчислення координат суми точок ЕК над полем характеристики не 2 і не 3.

Якщо $Q \neq \pm P$, то

$$\begin{cases} x_3 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 = -\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)(x_3 - x_1) - y_1 \end{cases}.\tag{9.11}$$

Якщо $Q = P$, тобто для обчислення координат $2P$ визначаємо:

$$\begin{cases} x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right)^2 - 2x_1 \\ y_3 = -y_1 - \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right)(x_3 - x_1) \end{cases}.\tag{9.12}$$

У випадку ЕК, заданих над скінченним полем F_q , операції додавання точок не мають геометричної інтерпретації, як для ЕК над полем дійсних чисел (відсутні поняття січної та дотичної). Але ці операції при $\text{char } F \neq 2, 3$ виконуються за тими самими формулами (9.11)–(9.12), що й для $F = \mathbb{R}$.

Потрібно лише зауважити, що у формулах (9.8)–(9.12) ділення треба розуміти як операцію у скінченному полі, тобто $a/b = a \cdot b^{-1}$, де $b^{-1}b = 1$.

Природно, ЕК над скінченним полем має скінченну кількість точок.

Означення 2. Кількість точок ЕК, враховуючи точку на нескінченності, називається *порядком ЕК*.

Означення 3. *Порядком точки P ЕК називається її порядок як елемента адитивної абелевої групи точок ЕК, тобто мінімальне натуральне число n таке, що $nP = P + P + \dots + P$ (n разів) $= O_E$.*

Розглянемо приклад еліптичної кривої над простим скінченним полем. Нехай

$$y^2 = x^3 + x + 1 \quad (9.13)$$

є рівнянням еліптичної кривої E_1 над полем $GF(11)$.

Спочатку перевіримо умову гладкості: так як у рівнянні E_1 $a = b = 1$, то $4a^3 + 27b^2 = 9 \neq 0 \pmod{11}$. E_1 — гладка.

Знайдемо всі точки даної еліптичної кривої. Щоб точка $P = (x_p, y_p)$ належала кривій E_1 , потрібно аби значення виразу в правій частині (9.13) при $x = x_p$ становило квадратичний лишок за модулем 11. У цьому прикладі неважко знайти всі квадратичні лишки, піднісши всі елементи $GF(11)$ до квадрата:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	1	4	9	5	3	3	5	5	4	1

Отже, квадратичними лишками за модулем 11 є: 1, 3, 4, 5, 9. Підставимо елементи $GF(11)$ у праву частину (9.13) і підрахуємо відповідні значення y , якщо у правій частині одержали квадратичний лишок:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 + x + 1$	1	3	0	9	3	10	3	10	4	2	10
y	1,10	5,6	0	3,8	5,6	—	5,6	—	2,9	—	—

Таким чином, еліптична крива E складається з точок: $(0, 1)$, $(0, 10)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 0)$, $(3, 3)$, $(3, 8)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$, $(8, 2)$, $(8, 9)$ і точки на нескінченності O_E . Тож порядок її дорівнює 14, і криву E можна графічно зобразити на площині так, як показано на рис. 113.

Підрахуємо суму точок $P = (8, 9)$ та $Q = (1, 5)$ еліптичної кривої E_1 над $GF(11)$ (див. рис. 113):

$$x_R = \left(\frac{9-5}{8-1} \right)^2 - 8 - 1 = (4 \cdot 7^{-1})^2 - 9 = (4 \cdot 8)^2 - 9 = 3,$$

$$y_R = -9 + \left(\frac{9-5}{8-1} \right)(8-3) = 8.$$

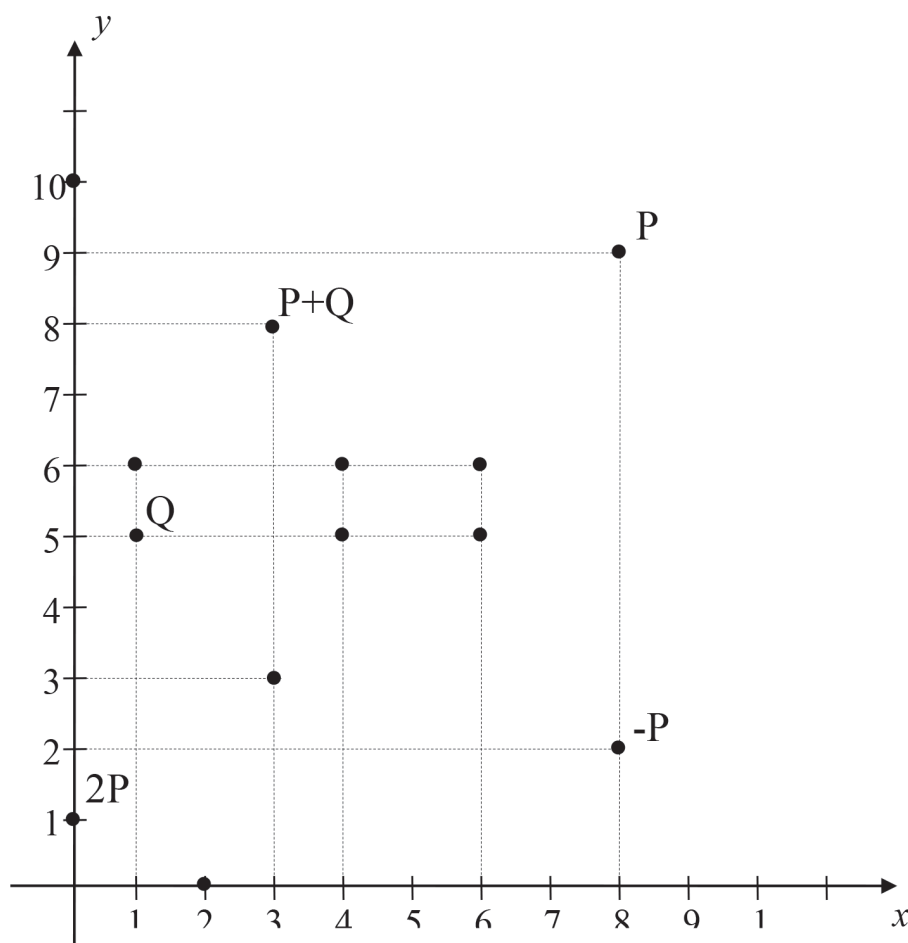


Рис. 113. Графічне зображення еліптичної кривої $y^2 = x^3 + x + 1$ над полем $GF(11)$

Таким чином, $P + Q = (3, 8)$.

Подвоїмо точку P :

$$x_R = \left(\frac{3 \cdot 8^2 + 1}{2 \cdot 9} \right)^2 - 2 \cdot 8 = 0,$$

$$y_R = -9 + \left(\frac{3 \cdot 8^2 + 1}{2 \cdot 9} \right) (8 - 0) = 1.$$

Отже, $2P = (0, 1)$.

Точка, протилежна до P : $-P = (8, -9) = (8, 2)$.

Точки P , Q , $P + Q$, $2P$, $-P$ зображені на рис. 113.

9.12.1. Варіанти завдань контрольної роботи № 1

Завдання 1. Дослідити на сумісність і розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методом Гаусса, Крамера та матричним:

$$1) \begin{cases} 2x - y + 4z = 6 \\ -x + 5y - 6z = 7; \\ 4x + 2y - z = 10 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y - 2z = -7 \\ 2x - 2y + z = 9; \\ x + 2y - z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
3) \begin{cases} x+2y+2z=4 \\ 3x-y-3z=14; \\ 2x+y+z=8 \end{cases} & 4) \begin{cases} 5x-3y+z=2 \\ 2x-y+z=3 \quad ; \\ x+3y+2z=13 \end{cases} \\
5) \begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ x-2y-3z=-1; \\ 4x-3y-5z=3 \end{cases} & 6) \begin{cases} x+5y-2z=13 \\ x-2y+3z=-4; \\ 3x-4y+z=6 \end{cases} \\
7) \begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ 5x-4y+2z=0; \\ x+3y+2z=6 \end{cases} & 8) \begin{cases} x+2y+2z=13 \\ 3x-y-z=4 \quad ; \\ 2x+y+3z=11 \end{cases} \\
9) \begin{cases} 4x-y+5z=4 \\ 2x-y+3z=2; \\ x+y-2z=3 \end{cases} & 10) \begin{cases} 3x-y+z=-3 \\ x-2y-4z=1 \quad ; \\ 2x+y-3z=12 \end{cases} \\
11) \begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ 2x+y-z=5 \quad ; \\ x+y-2z=5 \end{cases} & 12) \begin{cases} 2x+y+3z=8 \\ x+2y-4z=-3; \\ 2x-y+3z=10 \end{cases} \\
13) \begin{cases} x+2y+2z=10 \\ 3x-y+z=4 \quad ; \\ 4x-2y+5z=7 \end{cases} & 14) \begin{cases} 3x+2y-z=9 \\ x+2y-3z=-1; \\ x+y+5z=8 \end{cases} \\
15) \begin{cases} x+3y+2z=9 \\ 3x-2y+2z=-2; \\ 3x+2y+z=11 \end{cases} & 16) \begin{cases} 3x-4y-2z=9 \\ x+5y+2z=2 \quad ; \\ 4x+3y-z=7 \end{cases} \\
17) \begin{cases} x+3y+2z=-8 \\ 5x+2y-2z=0; \\ x+y-z=-3 \end{cases} & 18) \begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ 3x-2y-3z=14; \\ 2x-2y-z=7 \end{cases} \\
19) \begin{cases} 5x-3y+5z=2 \\ 2x+y+z=4 \quad ; \\ x+2y-3z=7 \end{cases} & 20) \begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 5x-y+3z=0 \quad ; \\ 2x+2y-3z=-3 \end{cases} \\
21) \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 2x+y-3z=-5; \\ x+y+2z=4 \end{cases} & 22) \begin{cases} 3x-y+2z=-10 \\ 4x+2y-z=-3 \quad ; \\ x+3y+z=3 \end{cases} \\
23) \begin{cases} 2x-3y+2z=-3 \\ x+2y-z=4 \quad ; \\ -x+5y-z=5 \end{cases} & 24) \begin{cases} x-y-z=4 \\ 3x+y-z=4; \\ 2x-3y=8 \end{cases} \\
25) \begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x-2y+z=7; \\ x-4y+3z=9 \end{cases} & 26) \begin{cases} -2x-4y+2z=-6 \\ 3x+y-5z=4 \quad ; \\ x-y+3z=0 \end{cases}
\end{array}$$

$$27) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 11; \\ -4x - y + 3z = -6 \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - y + z = -1; \\ -x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = -5 \\ 2x + 5y - 3z = -7; \\ 5x + 6 - 2z = -4 \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} 7x - 5y = 13 \\ 4x + 11y = 49; \\ 2x + 3y + 4z = 41 \end{cases}$$

Завдання 2. Задані координати точок $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $S(4; 3; 1)$ — вершини піраміди $A_1A_2A_3S$.

Знайти:

- а) координати векторів $\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SA_2}$, $\overrightarrow{SA_3}$ та їхні довжини;
- б) кут при вершині S грані A_1SA_2 ;
- в) площу основи $A_1A_2A_3$ піраміди $A_1A_2A_3S$;
- г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3S$ та довжину висоти SO , опущеної з вершини S на основу $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(3; 1; -4)$, $A_2(1; -4; 5)$, $A_3(2; -1; 0)$.
2. $A_1(2; -3; 5)$, $A_2(3; 4; 1)$, $A_3(-1; 2; -6)$.
3. $A_1(-5; 1; 3)$, $A_2(-2; 4; 5)$, $A_3(7; 3; -4)$.
4. $A_1(-2; -5; 1)$, $A_2(6; -1; 9)$, $A_3(1; 3; 2)$.
5. $A_1(-9; 2; 1)$, $A_2(-4; 5; -7)$, $A_3(2; 1; 4)$.
6. $A_1(1; 6; 5)$, $A_2(3; 2; 7)$, $A_3(4; -1; 1)$.
7. $A_1(-8; 5; 3)$, $A_2(-2; 1; 4)$, $A_3(5; 2; 1)$.
8. $A_1(-7; -3; 2)$, $A_2(8; 4; 1)$, $A_3(6; 2; 8)$.
9. $A_1(3; -7; 4)$, $A_2(1; -4; 2)$, $A_3(-5; 1; 3)$.
10. $A_1(-2; 5; 7)$, $A_2(-1; 4; 3)$, $A_3(3; -1; 8)$.
11. $A_1(7; 3; -4)$, $A_2(3; 4; 1)$, $A_3(2; -1; 0)$.
12. $A_1(2; -1; 0)$, $A_2(-5; 1; 3)$, $A_3(-1; 2; -6)$.
13. $A_1(-5; 1; 3)$, $A_2(-2; 4; 5)$, $A_3(7; 3; -4)$.
14. $A_1(-1; -5; 1)$, $A_2(7; -1; 8)$, $A_3(-5; 1; 3)$.
15. $A_1(-7; 2; 6)$, $A_2(-4; 5; 1)$, $A_3(3; 7; -5)$.
16. $A_1(-7; -4; 5)$, $A_2(3; 1; 9)$, $A_3(4; -2; 1)$.
17. $A_1(-8; 1; 3)$, $A_2(-2; -6; 4)$, $A_3(-7; 2; 1)$.
18. $A_1(-4; -3; 2)$, $A_2(2; -7; 1)$, $A_3(6; 2; 8)$.
19. $A_1(-6; 4; 9)$, $A_2(1; 3; 2)$, $A_3(7; -1; 5)$.
20. $A_1(-7; 5; 4)$, $A_2(-1; 8; 5)$, $A_3(2; -1; 7)$.
21. $A_1(8; -1; -4)$, $A_2(5; -3; 1)$, $A_3(7; -2; 6)$.
22. $A_1(-2; -6; 4)$, $A_2(-7; 2; -3)$, $A_3(0; -4; 6)$.
23. $A_1(-6; 2; -3)$, $A_2(1; 4; 3)$, $A_3(7; -3; 4)$.
24. $A_1(-2; -6; -9)$, $A_2(-4; -1; 2)$, $A_3(7; 0; 3)$.
25. $A_1(-9; 1; 4)$, $A_2(3; -7; 9)$, $A_3(2; 5; -6)$.

26. $A_1(7; -4; -10), A_2(9; 2; -7), A_3(5; -6; 1)$.
27. $A_1(0; 1; -3), A_2(4; 7; -9), A_3(1; -5; 6)$.
28. $A_1(-3; 1; -2), A_2(-7; 3; -4), A_3(9; -2; 5)$.
29. $A_1(3; -7; 6), A_2(-1; 6; 9), A_3(8; 1; 7)$.
30. $A_1(9; -8; 5), A_2(3; 8; 7), A_3(-2; 1; 8)$.

Завдання 3. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом, якщо:

1. $\vec{a} = (1; 4; -2), \vec{b} = (3; 1; 6), \vec{c} = (-1; 2; 0), \vec{d} = (4; 3; 5)$.
2. $\vec{a} = (5; 0; -2), \vec{b} = (-4; 1; 3), \vec{c} = (3; 4; -2), \vec{d} = (3; -3; 1)$.
3. $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (2; -1; 2), \vec{c} = (5; 3; 4), \vec{d} = (0; 2; 1)$.
4. $\vec{a} = (1; 5; 3), \vec{b} = (-4; -2; 2), \vec{c} = (3; 5; 2), \vec{d} = (3; 7; 2)$.
5. $\vec{a} = (3; -1; 2), \vec{b} = (-2; -1; 5), \vec{c} = (2; 3; -1), \vec{d} = (7; 7; 4)$.
6. $\vec{a} = (4; 3; 2), \vec{b} = (2; -4; -3), \vec{c} = (4; 5; 5), \vec{d} = (6; -3; -4)$.
7. $\vec{a} = (3; 1; 4), \vec{b} = (2; -1; 3), \vec{c} = (-1; 2; -1), \vec{d} = (4; 5; 7)$.
8. $\vec{a} = (2; 2; 3), \vec{b} = (-3; -3; -2), \vec{c} = (-2; -1; -3), \vec{d} = (0; 1; 5)$.
9. $\vec{a} = (1; 4; 3), \vec{b} = (1; -2; -1), \vec{c} = (-4; 1; 2), \vec{d} = (11; 5; -1)$.
10. $\vec{a} = (1; 3; 2), \vec{b} = (2; -4; -3), \vec{c} = (4; 5; 5), \vec{d} = (6; -3; -4)$.
11. $\vec{a} = (1; 3; 5), \vec{b} = (2; 1; -2), \vec{c} = (5; 4; -1), \vec{d} = (-6; 3; 20)$.
12. $\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (-2; -5; -7), \vec{c} = (3; 2; 4), \vec{d} = (3; 1; 3)$.
13. $\vec{a} = (3; 1; 2), \vec{b} = (-5; 2; -1), \vec{c} = (3; 5; 3), \vec{d} = (4; 9; 6)$.
14. $\vec{a} = (2; 3; 5), \vec{b} = (-1; 2; -2), \vec{c} = (2; 3; 1), \vec{d} = (1; 5; 11)$.
15. $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (3; 5; -1), \vec{c} = (2; -1; 3), \vec{d} = (4; -1; 10)$.
16. $\vec{a} = (3; 2; 1), \vec{b} = (2; -3; -4), \vec{c} = (3; 5; 5), \vec{d} = (-4; 3; 4)$.
17. $\vec{a} = (2; 2; 1), \vec{b} = (4; 3; -1), \vec{c} = (1; -1; 2), \vec{d} = (3; 2; 6)$.
18. $\vec{a} = (1; 3; 2), \vec{b} = (2; -7; -3), \vec{c} = (-3; 1; -2), \vec{d} = (4; 9; 5)$.
19. $\vec{a} = (2; 3; 4), \vec{b} = (2; -1; -2), \vec{c} = (-5; 2; 1), \vec{d} = (3; 6; 5)$.
20. $\vec{a} = (4; 3; 2), \vec{b} = (5; 2; 5), \vec{c} = (2; 5; -3), \vec{d} = (-5; -9; 3)$.
21. $\vec{a} = (2; 5; -4), \vec{b} = (-3; -2; 1), \vec{c} = (1; -1; 4), \vec{d} = (2; 0; 9)$.
22. $\vec{a} = (1; -1; 3), \vec{b} = (-1; -1; 1), \vec{c} = (4; 1; -1), \vec{d} = (15; 4; -2)$.
23. $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (3; -1; 1), \vec{c} = (-1; 2; 5), \vec{d} = (-8; 10; -8)$.
24. $\vec{a} = (3; -1; 1), \vec{b} = (1; 3; 2), \vec{c} = (-1; 1; 5), \vec{d} = (-2; 4; 12)$.
25. $\vec{a} = (1; -2; 1), \vec{b} = (2; 1; 1), \vec{c} = (-5; 3; -1), \vec{d} = (15; -14; 4)$.

26. $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 1; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 2)$, $\vec{d} = (-6; 4; 1)$.
 27. $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (3; 1; 2)$, $\vec{c} = (4; 1; -1)$, $\vec{d} = (-11; -2; -1)$.
 28. $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$, $\vec{c} = (1; 2; -1)$, $\vec{d} = (1; -1; 3)$.
 29. $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (-1; 1; 3)$, $\vec{c} = (1; -1; 2)$, $\vec{d} = (1; 11; 7)$.
 30. $\vec{a} = (1; -5; 7)$, $\vec{b} = (5; 3; 1)$, $\vec{c} = (-8; -2; -1)$, $\vec{d} = (15; 9; 11)$.

Завдання 4. Обчислити границі, не користуючись правилом Лопіталя:

1. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}{x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 8}{4 + 3x - x^2}$.
2. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\arcsin 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^3 + 2x + 2}{5x^2 - 4x - 9}$.
3. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{\ln(1 + 2x)}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 4x}{-4x^3 - 3x^2 - 4}$.
4. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{7}}{x^2 - 16}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - 2x^2}{3 - 2x^2} \right)^{7-x^2}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^6 - 5x^5 + 2x - 1}$.
5. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{3x+5}$;

- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 4}{2x^3 - 5x^2 - 3x + 4}.$
6. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{1 - \cos 8x};$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 2}{2x + 5} \right)^{\frac{x+1}{3}};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 3x + 6}{x^2 - 7x - 2}.$
7. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 5x}{x^3};$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2} \right)^{\frac{2x+1}{3}};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{5x^6 - x^3 + 2}.$
8. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$ б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \cdot \arcsin 3x};$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{x^2+1};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 9x^3 - 2x + 1}{2x^2 + x - 6}.$
9. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$ б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 6x - 7}{\sqrt{x^2 - 3} - 2};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos 10x};$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-5} \right)^{\frac{x+4}{7}};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 2x - 1}.$
10. а) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$ б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x^2 - 8x + 7};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 6x}{5 \sin^2 2x};$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-4} \right)^{2x+3};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{-5x^3 - x^2 - 3x + 1}.$
11. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^4 - 81};$ б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{x-4};$

- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 5}{x^3 - 2} \right)^{x^2 + 1}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + x - 2x^2}{2x^2 + 10x + 5}$.
12. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - 3x - 4}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{2x+3} - 3}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x - 4}{3x^2 + 4x - 7}$.
13. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{\sqrt{x+5} - 3}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 5x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 3} \right)^{x+2}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^4 - x^3 - 3x + 7}$.
14. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}}{x-3}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \cos 2x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+5} \right)^{\frac{x+2}{7}}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 7x^3 + 6x}{x^2 + 2x - 8}$.
15. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{4 - \sqrt{4x+8}}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{5-x} \right)^{\frac{2x+1}{2}}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 + 8x^2 + 3x - 1}$.
16. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x^2}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 - 2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 10}{x^4 - 25x^3 + 6x - 2}$.

17. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x - 4}{3x^2 + 4x - 7}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 7x + 6}{\sqrt{5 + x} - 2}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{3x + 5} \right)^{5-x}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 2x^2 - 1}{x^5 - 2x + 3}$.
18. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 + 8}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x^3 - 1}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x + 3} \right)^{\frac{x^2 + 2}{x}}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - 7x + 4}{x^3 + 9}$.
19. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x^2 - 3x - 4}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin^2 x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 4}{x - 5} \right)^{2-x^2}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x - 6}{x^2 - 3x - 4}$.
20. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^4 - x - 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{9 - x}}{x - 2}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{\operatorname{arctg}^2 x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 4} \right)^{x+1}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 8}{x^4 - 8x + 4}$.
21. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x^2 + x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\operatorname{tg} 3x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x^2}{3 - x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 6x - 1}{6x^6 - 5x^4 + 4x}$.
22. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x^2 + x^5}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6 + x} - 2}{\sqrt{7 - x} - 3}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sin^2 x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + x^3}{6 + x^3} \right)^{x-1}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^3 + 5x^2 - 1}$.

$$23. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 - 4x^2 - 5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{e^{2x} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^6 - 2x^5 + 2x^3}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$24. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot \sin x}{\operatorname{arctg} 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 8x + 5}{3x^2 + 9x - 6}.$$

$$25. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 - 3x}{x^2 - 5x}.$$

$$26. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{5x^3 - 1}.$$

$$27. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x^2}{\sqrt{1 + 8x} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 3}{8x^2 - 10x - 3}.$$

$$28. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x}{x^3 + 3x^2 - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x^2 + 3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x - 1}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x + 5} \right)^{5x+1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+3}{3x-3} \right)^{\frac{6x^2-1}{2}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{11+x} - 2}{x+7};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x+3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-7} \right)^{\frac{x+1}{3}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{2 - \sqrt{3+x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x} \right)^{\frac{2x+1}{5}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{6+x} - \sqrt{6}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-6} \right)^{x^2};$$

$$\begin{array}{ll}
\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 + 3x - 6}{3x^5 + 5x - 3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{2+x}}{2x-4}; \\
29. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-5} \right)^{3-x^2}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-3^x}{\sin^3 x}; & \\
\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 7x + 3}; & \\
30. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x^2 - 3x + 2}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(2x+1)}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 2} \right)^{x+3}; \\
\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x - 2}. &
\end{array}$$

Завдання 5. Знайти похідні функцій:

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ а) } y = \ln(x + \sqrt{4+x^2}); & \text{б) } \begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases}; \\
\text{в) } y = (\operatorname{ctg} 4x)^x; & \text{г) } x = y^2 + \operatorname{arctg}(xy). \\
2. \text{ а) } y = \sqrt{4-x^2} - 4 \arccos \frac{x}{2}; & \text{б) } \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-2t} \end{cases}; \\
\text{в) } y = (\cos 2x)^{\sin x}; & \text{г) } \ln(y-x) = yx^2. \\
3. \text{ а) } y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x; & \text{б) } \begin{cases} x = e^t + t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}; \\
\text{в) } y = (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}; & \text{г) } 7^x + 7^y = 7^{x+y}. \\
4. \text{ а) } y = \ln(e^x + \sqrt{3+2x}); & \text{б) } \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = 2 \operatorname{tg} t \end{cases}; \\
\text{в) } y = (\cos 3x)^{2x+1}; & \text{г) } e^y \cdot \sin x = e^{-x} \cdot \cos y. \\
5. \text{ а) } y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}; & \text{б) } \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}; \\
\text{в) } y = (x^3 + 4)^{\sin 2x}; & \text{г) } y \cdot \sin x - \cos(x-y) = 0. \\
6. \text{ а) } y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \frac{1}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}; & \text{б) } \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 + t \end{cases}; \\
\text{в) } y = x^{\arccos x}; & \text{г) } \ln x + e^{\frac{y}{x}} = e.
\end{array}$$

7. а) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 - e^{-x^3}}$;
 б) $y = (\ln 2x)^{\frac{x}{2}}$;
 в) $x^2 + y^2 = \ln y$.
8. а) $y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}$;
 б) $y = (x + 5)^{\cos 2x}$;
 в) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t + \operatorname{arctg} t \end{cases}$;
 г) $\ln(y - x) = y \cdot x^2$.
9. а) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \arcsin \frac{x}{2}$;
 б) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$;
 в) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$;
 г) $y \cdot \ln x = x^3$.
10. а) $y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \arcsin \sqrt{1 - x^2}$;
 б) $y = (\arcsin x)^{\sqrt{1 - x^2}}$;
 в) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 1 - t^3 \end{cases}$;
 г) $x + y + \sqrt{xy} = 10$.
11. а) $y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$;
 б) $y = (1 - x^2)^{\arccos x}$;
 в) $\frac{y}{x} = e^y$.
12. а) $y = \sqrt{1 + \ln^2 \frac{x}{2}}$;
 б) $y = (\ln x)^{\operatorname{ctg} 2x}$;
 в) $\begin{cases} x = \ln 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$;
 г) $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(xy)$.
13. а) $y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$;
 б) $y = (x^2 + 2)^{\cos 3x}$;
 в) $\begin{cases} x = 5^t + 1 \\ y = 10^t - 4 \end{cases}$;
 г) $2y \ln y = x$.
14. а) $y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)$;
 б) $y = (\sin x)^{\ln x}$;
 в) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = (t + 1)^2 \end{cases}$;
 г) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.
15. а) $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg} e^x$;
 б) $y = (x^2 - 1)^x$;
 в) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} 2t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$;
 г) $e^{x+y} = xy$.
16. а) $y = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$;
 б) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = e^t \end{cases}$;

- Б) $y = (2x + 3)^{\sqrt{x-1}}$;
17. а) $y = x + \frac{8}{1 + e^{\frac{x}{4}}}$;
- Б) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$;
18. а) $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$;
- Б) $y = (x^2 + 5x)^{\sqrt{x}}$;
19. а) $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2 x}$;
- Б) $y = x^{\ln x}$;
20. а) $y = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$;
- Б) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$;
21. а) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos \ln \operatorname{tg} x$;
- Б) $y = (\sqrt{x})^{\sqrt[4]{x}}$;
22. а) $y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$;
- Б) $y = x^{\sqrt{x^2-1}}$;
23. а) $y = \cos^2(\sin e^{3x})$;
- Б) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;
24. а) $y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{4x}}$;
- Б) $y = (\arcsin 2x)^{\ln x}$;
25. а) $y = 3^{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$;
- Б) $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2+1}$;
- Г) $e^y = x + y$.
- Ъ) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \arccos t \end{cases}$;
- Г) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$.
- Ъ) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$;
- Г) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 1$.
- Ъ) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases}$;
- Г) $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
- Ъ) $\begin{cases} x = \sin 5t \\ y = t - \cos t \end{cases}$;
- Г) $\operatorname{tg} y = xy$.
- Ъ) $\begin{cases} x = \ln(1+t^3) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$;
- Г) $y = 1 + xe^y$.
- Ъ) $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$;
- Г) $\cos(xy) = x$.
- Ъ) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} 2t \\ y = \ln(\sin 2t) \end{cases}$;
- Г) $\sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} = 5$.
- Ъ) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{t} \\ y = e^t \end{cases}$;
- Г) $y^2 = x \sin y$.
- Ъ) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos t^2 \end{cases}$;
- Г) $y + \sqrt{x} \ln y = 1$.

$$\begin{array}{ll}
26. \text{ а) } y = \arctg\left(x - \sqrt{1+x^2}\right); & \text{б) } \begin{cases} x = \sin 3t - t; \\ y = 2t + \cos t; \end{cases} \\
\text{в) } y = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^x; & \text{г) } y = \cos(x^2 + y). \\
27. \text{ а) } y = \frac{1}{2} \arctg \frac{e^x - 3}{2}; & \text{б) } \begin{cases} x = e^t + \sin t; \\ y = \operatorname{ctg}(t+1); \end{cases} \\
\text{в) } y = (x^3 + 2)^{\ln x}; & \text{г) } \ln y = \sin(xy). \\
28. \text{ а) } y = \ln^2(x + \cos x); & \text{б) } \begin{cases} x = \sqrt{3t}; \\ y = \ln t; \end{cases} \\
\text{в) } y = x^{2^x}; & \text{г) } e^y x - \sin x = y. \\
29. \text{ а) } y = \ln \ln^2 \ln^3 x; & \text{б) } \begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \\
\text{в) } y = x^{-\operatorname{tg} x}; & \text{г) } \operatorname{tg} y + e^y = x. \\
30. \text{ а) } y = \sqrt{2^x - 1} - \arctg \sqrt{2^x - 1}; & \text{б) } \begin{cases} x = e^{-t} + t; \\ y = \ln t \end{cases} \\
\text{в) } y = (x^2 + 3)^{\sqrt{x}}; & \text{г) } \ln y + \cos(xy) = x.
\end{array}$$

Завдання 6. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ а) } y = \frac{x^2}{x^2 - 1}; & \text{б) } y = x^3 \cdot e^{-x}. \\
2. \text{ а) } y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}; & \text{б) } y = (x - 1) \cdot e^{1-x}. \\
3. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}; & \text{б) } y = \frac{\ln x}{x}. \\
4. \text{ а) } y = \frac{x^3}{3 - x^2}; & \text{б) } y = \ln(2x^2 + 3). \\
5. \text{ а) } y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}; & \text{б) } y = x^2 \cdot e^{-x}. \\
6. \text{ а) } y = \frac{4x^2}{3 - x}; & \text{б) } y = (x - 1)^2 \cdot e^x. \\
7. \text{ а) } y = \frac{x^3}{x^2 - 4}; & \text{б) } y = x\sqrt{x + 3}. \\
8. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}; & \text{б) } y = (3 - x) \cdot e^{x-2}. \\
9. \text{ а) } y = \frac{4 - x^2}{1 - x}; & \text{б) } y = x^2 \cdot \ln x.
\end{array}$$

- | | |
|--|---|
| 10. a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; | б) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$. |
| 11. a) $y = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$; | б) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. |
| 12. a) $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$; | б) $y = e^{2x-x^2}$. |
| 13. a) $y = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$; | б) $y = \frac{x}{\ln x}$. |
| 14. a) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$; | б) $y = (x + 4) \cdot e^{2x}$. |
| 15. a) $y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}$; | б) $y = \frac{e^x}{1 + x}$. |
| 16. a) $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$; | б) $y = (x - 3)\sqrt{x}$. |
| 17. a) $y = \frac{2x}{x^3 - 8}$; | б) $y = \frac{1}{e^x - 1}$. |
| 18. a) $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ б) $\ln y = (x^2)$ | |
| 19. a) $y = \frac{x}{1 + x^2}$; | б) $y = \frac{e^x}{x}$. |
| 20. a) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$; | б) $y = \ln x - \frac{1}{2}x^2$. |
| 21. a) $y = \frac{5x}{x^2 - 4}$; | б) $y = x^2 \cdot \ln x$. |
| 22. a) $y = \frac{1}{1 - x^2}$; | б) $y = 2x^2 - \ln x$. |
| 23. a) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$; | б) $y = \frac{\ln x}{x}$. |
| 24. a) $y = \frac{x^2}{x^3 + 8}$; | б) $y = \ln \frac{x+1}{x-2}$. |
| 25. a) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$; | б) $y = (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$. |
| 26. a) $y = \frac{x^3}{x - 1}$; | б) $y = x - \ln x$. |
| 27. a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$; | б) $y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$. |
| 28. a) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$; | б) $y = x - \ln(x + 1)$. |

$$29. \text{ а) } y = \frac{x}{x^2 - 4}; \quad \text{б) } y = e^{4x - x^2}.$$

$$30. \text{ а) } y = \frac{x^3 - 4}{x^2}; \quad \text{б) } y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Завдання 7. Функції попиту q та пропозиції s від ціни p виражаються рівнянням $q = q(p)$, $s = s(p)$. Знайти:

а) ціну рівноваги;

б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни.

1. $q = 1400 - 5p$, $s = 1100 + 5p$.
2. $q = 10 - p + 2\sqrt{p}$, $s = 4p - 6$.
3. $q = 1300 - 4p$, $s = 1000 + 2p$.
4. $q = 20 - p + 6\sqrt{p}$, $s = 2p - 25$.
5. $q = 2000 - 20p$, $s = 200 + 10p$.
6. $q = 12 - 3p + 2\sqrt{p}$, $s = 2p - 4$.
7. $q = 1100 - 10p$, $s = 800 + 20p$.
8. $q = 7 - 2p + 4\sqrt{p}$, $s = 2p - 1$.
9. $q = 1000 - 5p$, $s = 800 + 5p$.
10. $q = 8 - p$, $s = p + 2$.
11. $q = 1500 - 30p$, $s = 500 + 20p$.
12. $q = 9 - 3p + 2\sqrt{p}$, $s = 2p - 7$.
13. $q = 2100 - 40p$, $s = 1100 + 60p$.
14. $q = 15 - 2p$, $s = p + 6$.
15. $q = 1400 - 10p$, $s = 200 + 20p$.
16. $q = 30 - 2p + 6\sqrt{p}$, $s = p - 15$.
17. $q = 1800 - 5p$, $s = 1700 + 5p$.
18. $q = 25 - 5p + 4\sqrt{p}$, $s = 5p - 7$.
19. $q = 1200 - 30p$, $s = 800 + 10p$.
20. $q = 12 - p$, $s = p + 2$.
21. $q = 1300 - 2p$, $s = 900 + 2p$.
22. $q = 1 - 2p + 4\sqrt{p}$, $s = 2p - 7$.
23. $q = 700 - 8p$, $s = 100 + 2p$.
24. $q = 9 - 2p$, $s = p + 3$.
25. $q = 900 - 20p$, $s = 300 + 10p$.
26. $q = 18 - 6p + 4\sqrt{p}$, $s = 4p - 14$.
27. $q = 1200 - 5p$, $s = 700 + 5p$.
28. $q = 30 - 5p$, $s = p + 6$.
29. $q = 2300 - 40p$, $s = 1800 + 10p$.

$$30. q = 25 - p + 6\sqrt{p}, \quad s = 2p - 20.$$

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію $z = f(x, y)$:

1. $z = 3x^2 - 5xy + 4y^2 - 7x - y + 1.$	2. $z = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x - y + 5.$
3. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2.$	4. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$
5. $z = 5x^2 - 7xy + 9y^2 - x - y + 1.$	6. $z = 6x^2 - 8xy + 5y^2 + 2x + y + 3.$
7. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$	8. $z = 6x^2 + 4xy + 3y^2 - x - y + 1.$
9. $z = 3x^2 - 5xy + 8y^2 - x - 2y + 1.$	10. $z = 5x^2 - 6xy + 9y^2 - x - y + 3.$
11. $z = 4x^2 - 3xy + 5y^2 - x + y - 2.$	12. $z = 4x^2 - 6xy + 7y^2 - 7x - y + 1.$
13. $z = x^2 - 2xy + 7y^2 - x - y.$	14. $z = 8x^2 - 3xy + y^2 - x + 5y - 1.$
15. $z = 5x + y - x^2 - xy + y^2 + 1.$	16. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y - 5.$
17. $z = 3x^2 + xy + 4y^2 - x - 2y.$	18. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2.$
19. $z = x^2 + xy + 3y^2 + 2x - y + 5.$	20. $z = 5x^2 - 6xy + 3y^2 - x - y + 1.$
21. $z = 4x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x + y.$	22. $z = 5x^2 - xy + y^2 - x - 2y - 1.$
23. $z = 4x^2 - 3xy + 2y^2 - x + 3y.$	24. $z = 7x^2 - 2xy + 3y^2 + x + y + 5.$
25. $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - y + 1.$	26. $z = 5x^2 - xy + y^2 - x - y - 1.$
27. $z = x^2 - xy + 7y^2 + 5x + y + 1.$	28. $z = 6x^2 - 3xy + y^2 - x - y + 1.$
29. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 3.$	30. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y + 2.$

9.12.2. Контрольна робота до теми кратний інтеграл

Варіант 1

1. Обчислити подвійний інтеграл:

а) $\iint_D ye^{xy/2} dx dy; \quad D: y = \ln 2, \quad y = \ln 3, \quad x = 2, \quad x = 4;$

б) $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy; \quad D: x = 1, \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = -x^2.$

2. Обчислити потрійний інтеграл:

$$\iiint_G xy dx dy dz; \quad G: x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

3. Знайти довжину дуги $\Gamma: \rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0; 3\pi].$

4. Перевірити, чи залежить інтеграл $\int_{AB} \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy$ від форми кривої в області $x < 0, y > 0$.

Варіант 2

1. Обчислити подвійний інтеграл:

а) $\iint_D 2y \cos 2xy \, dx \, dy$; $D: y = \pi/4, x = 1, x = 2$;

б) $\iint_D y^2 e^{-xy/8} \, dx \, dy$; $D: x = 0, y = 2, y = x/2$.

2. Обчислити потрійний інтеграл:

$$\iiint_G (x + y + z) \, dx \, dy \, dz; \quad G: 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c.$$

3. Обчислити масу кривої $x = \ln(1+t^2)$, $y = 2\arctgt - t$, $t \in [0; 1]$, якщо її густина $\mu = y/e^x$.

4. Обчислити інтеграл $\int_{\Gamma} (x - y) \, dx + dy$ по верхньому півколу $x^2 + y^2 = 25$ від точки $A(-5, 0)$ до точки $B(5, 0)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Landi G., Zampini A.* Linear Algebra and Analytic Geometry for Physical Sciences. Cham : Springer International Publishing, 2018. 332 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78361-1>.
2. *Robert Barclay, Brian Logan, Mike Smith.* Higher Mathematics, Second Edition. 2019. 304 p.
3. Heinemann Higher Mathematics Student Book, 2nd edition. Paperback, 2008. 448 p.
4. *Барковський В. В., Барковська Н.* Вища математика для економістів: навч. посіб. 5-те вид. Київ: Центр учбової л-ри, 2010. 448 с.
5. *Барковський В. В., Барковська Н. В.* Вища математика для економістів (практика). Київ, 2005.
6. *Бородін О. І.* Теорія чисел. Київ: Вища шк., 1970. 274 с.
7. *Булдигін В. В., Алексєєва І. В., Гайдей В. О.* Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Київ: ТВіМС, 2011. 224 с.
8. *Буценко Ю. П., Диховичний О. О., Тимошенко О. А.* Вища математика для економістів. Київ, 2014. 256 с.
9. *Валєєв К. Г., Джалладова І. А.* Вища математика. Ч. 1. Київ, 2001. 546 с.
10. *Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С.* Числові системи. Київ: Вища шк., 1988. 271 с.
11. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика. Київ, 2001. 648 с.
12. *Долженко Є. П., Єрмаков А. І.* Теорія функції комплексної змінної та деякі її застосування: навч. посіб. Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2003. 192 с.
13. *Єфіменко С. В.* Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра: метод. посіб. для студ. радіофізич. ф-ту напрям підготовки "Радіотехніка". Київ: КНУ, 2011. 56 с.
14. *Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І.* Алгебра і теорія чисел. Ч. 1. Київ: Вища шк., 1974. 464 с.
15. *Калужнін Л. А.* Гіперкомплексні числа. *У світі математики*. Київ: Рад. шк., 1977. Вип. 8. С. 99–112.
16. *Клепо В. Ю., Голець В. Л.* Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. 2-ге вид. Київ: Центр учбової л-ри, 2009. 594 с.
17. *Кононюк А. Ю.* Вища математика (модульна технологія навчання): навч. посіб.: в 2-х кн. Кн. 1. Київ: КТН, 2009. 698 с.
18. *Крутовий Ж. А., Софронова М. С.* Вища математика. Харків: ХДУХТ, 82 с.
19. *Літнарів Р. М.* Лінійна алгебра. Елементи теорії визначників: курс лекцій. МЕНУ. Рівне, 2006. 72 с.
20. *Омецинська Н. В., Бишевец Н. Г., Юсипів Т. В., Костіна Т. О.* Практичне застосування методів математичної статистики в психології та соціології засобами табличного процесора MS Excel. Київ, 2022. 161 с.
21. *Ординська З. П., Репета Л. А.* Математика для економістів. Київ: НТУУ "КПІ", 2014. 226 с.

Розглянуто ретельно відібрані і систематизовані теоретичні поняття, теореми, методи і спеціалізовані розділи для розуміння математичного апарату сучасної криптографії, криптографічних протоколів тощо. Наведено практичні навчальні приклади, задачі для самостійного розв’язання, рисунки, схеми. Викладено як теоретичні відомості, так і методи розв’язання основних типів задач із багатьма прикладами. Всі теми супроводжуються варіантами завдань для контрольних і самостійних робіт.

Для криптографів, фахівців з комп’ютерних наук, прикладної математики і системного аналізу.

Навчальне видання

СКУРАТОВСЬКИЙ Руслан Вячеславович

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ КРИПТОГРАФІВ З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ

Підручник

Редактор *Т. М. Коліна*
Коректор *Т. К. Валицька*
Комп’ютерне верстання *Н. В. Коваленко*

Підп. до друку 26.02.26. Формат 70×100¹/₁₆.
Ум. друк. арк. 27,41. Обл.-вид. арк. 13,95. Наклад 50 пр.

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2

Свідоцтво
про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 7066 від 04.06.2020

Виготовлювач: ТОВ “Видавництво Ліра-К”
Свідоцтво № 3981, серія ДК.
03115, м. Київ, вул. С. Чобану, 24. тел.: (050) 462-95-48; (067) 820-84-77
Сайт: lira-k.com.ua, редакція: zv_lira@ukr.net