

**Р. В. СКУРАТОВСЬКИЙ
О. Г. ЧОЛИШКІНА**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК
З ПРИКЛАДАМИ ТА ЗАДАЧАМИ**

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



Р. В. СКУРАТОВСЬКИЙ
О. Г. ЧОЛИШКІНА

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК
З ПРИКЛАДАМИ ТА ЗАДАЧАМИ**

Навчальний посібник

Київ
2023

УДК 51(075.8)
С46

Рецензенти: *О. Г. Корченко*, д-р техн. наук,
завідувач кафедри безпеки інформаційних
технологій
Р. Р. Салімов, д-р фіз.-мат. наук,
провідний науковий співробітник відділу
комплексного аналізу і теорії потенціалу

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління
персоналом (протокол № 7 від 28.09.22)*

Скуратовський Р. В., Чолишкіна О. Г.
С46 Вища математика для комп'ютерних наук з прикладами та задачами: навч. посіб. Київ : Міжрегіональна Академія управління персоналом, 2023. 90 с.
ISBN 978-617-02-0382-3

Навчальний посібник є складовою навчально-методичного комплексу. Він містить теоретичні поняття, практичні навчальні приклади, задачі для самостійного розв'язання, рисунки, схеми тощо.

Для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання.

УДК 51(075.8)

© Р. В. Скуратовський,
О. Г. Чолишкіна, 2023
© Міжрегіональна Академія
управління персоналом, 2023

ISBN 978-617-02-0382-3

ЗМІСТ

Передмова	5
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	7
1.1. Матриці	7
1.2. Дії над матрицями	12
1.3. Числові характеристики матриць	12
1.3.1. Визначник матриці	12
1.3.2. Системи лінійних рівнянь і метод Крамера	15
1.3.2.1. Число рівнянь і невідомих дорівнює 2 ...	16
1.3.2.2. Число рівнянь і невідомих дорівнює 3 ...	19
1.3.3. Приклади розв'язання задач з лінійної алгебри	25
Завдання для МКР і самостійних робіт	35
Завдання для самостійної роботи	43
Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ	45
2.1. Прямокутна система координат	45
2.2. Полярні координати	47
2.3. Рівняння лінії на площині	49
2.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	50
2.4.1. Приклади і методи розв'язання задач з аналітичної геометрії	52
2.5. Векторний добуток і його властивості	53
Розділ 3. РІЗНІ АРИФМЕТИКИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ	56
Розділ 4. КВАТЕРНІОНИ	60
4.1. Операції над кватерніонами та їх властивості	62
4.1.1. Асоціативний закон множення кватерніонів	62

4.1.2. Спряження кватерніонів	64
4.1.3. Ділення в системі кватерніонів	64
Розділ 5. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ КВАТЕРНІОНІВ У ВЕКТОРНІЙ АЛГЕБРІ	66
5.1. Числова і векторна частини кватерніонів	66
5.2. Скалярний добуток	67
5.3. Векторний добуток кватерніонів, представлених у формі векторів	69
Розділ 6. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ	71
6.1. Елементи теорії множин	71
6.2. Основні властивості неперервних функцій	73
6.3. Завдання для практичних занять з математичного аналізу	75
6.3.1. Завдання для практичних занять з теми границя числової послідовності	75
6.3.2. Завдання для практичних занять з теми границя функції	79
6.3.3. Завдання для практичних занять з теми дослідження функцій	80
6.3.4. Варіанти завдань контрольної роботи	82
Список літератури.....	86

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник “Вища математика для комп’ютерних наук з прикладами та задачами” підготовлено автором з кафедри обчислювальної математики і комп’ютерного моделювання МАУП на основі лекцій, які читалися для студентів університету різних спеціальностей, зокрема “Комп’ютерні науки, системний аналіз, прикладна математика і інформаційні системи і технології”, протягом багатьох років, а також матеріалів однойменного дистанційного курсу за напрямками 7.0913 (122, 113) “Комп’ютерні науки та обчислювальна техніка”, “Прикладна математика”.

“Вища математика для комп’ютерних наук з прикладами та задачами” є складовою *навчально-методичного комплексу*, який містить навчальний посібник, практикум, збірник типових розрахункових робіт, а також збірник тестових завдань.

Посібник охоплює матеріал з вищої математики відповідно до програми підготовки бакалаврів інженерно-технічних спеціальностей “ІКІТ” за темами: матриці та визначники; системи лінійних алгебраїчних рівнянь; векторна алгебра та лінійні простори; комплексні числа; геометрія прямої і площини; криві та поверхні 2-го порядку.

Навчальний посібник містить ретельно відібрані та систематизовані теоретичні поняття, практичні навчальні приклади, задачі для самостійного розв’язання, рисунки, схеми тощо. Застосування відповідних математичних понять окремо показано на широкому спектрі прикладів економічного та технічного змісту.

Матеріал посібника викладено на двох рівнях: базовому і розширеному. *Базовий* рівень містить: означення, формулювання теорем, коментарі до них; методи розв’язання задач, проілюстровані прикладами; застосування математичних понять і методів. *Розширений* рівень доповнює базовий: уточненнями формулюваннями; додатковими фактами; доведеннями

теорем, що наведені у тексті дрібним шрифтом і не є обов'язковими.

Крім того, посібник містить:

- тест для самоконтролю;
- перелік екзаменаційних питань;
- історичні відомості;
- список використаної і рекомендованої літератури.

Розділ 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Список умовних позначень

- СЛАР — система лінійних алгебраїчних рівнянь.
- Δ_i — визначник матриці, отриманої з основної матриці шляхом заміни i -го стовпця основної матриці на стовпець з коефіцієнтів вільного вектора b .
- A^T — матриця, транспонована до матриці A .
- $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел.

1.1. Матриці

Означення. *Матрицею порядку m на n* називають прямокутну таблицю чисел, яка складається з m рядків і n стовпців. Загальний вигляд:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

Також така матриця позначається як A_{mn} . Число a_{ij} називається елементом матриці. Числа i та j позначають відповідні i -й рядок і j -й стовпець, в яких цей елемент знаходиться.

Таким чином матриці бувають **прямокутні** $m \times n$ і **квадратні** $n \times n$. Про квадратні матриці розмірності $n \times n$ кажуть, що вони мають порядок n .

Приклад **прямокутної матриці** $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Трикутною матрицею називають матрицю виду:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Дві матриці A і B розмірності $m \times n$ називаються рівними тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ для всіх i, j : $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Контрольне питання. Якщо число рядків матриці дорівнює числу стовпців, то як називається така матриця?

Головною діагоналлю квадратної матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають діагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Квадратна матриця називається **верхньо-трикутною**, якщо всі елементи цієї матриці, які знаходяться нижче головної діагоналі, рівні нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі елементи цієї матриці, які знаходяться не на головній діагоналі, рівні нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад діагональної матриці порядку n .

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{nn} \end{array} \right).$$

Якщо всі елементи діагональної матриці рівні між собою, то таку матрицю називають **скалярною**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right).$$

Якщо елементи діагональної матриці рівні одиниці, то таку матрицю називають одиничною, якщо нулю — нульовою.

Операція **транспонування** позначається символом “ T ”, що вказується після позначення матриці у верхньому індексі, наприклад A^T .

Очевидно, якщо вихідна матриця A мала розмір $m \times n$, то транспонована матриця A^T буде розміром $n \times m$. Матриця-рядок у результаті транспонування перетворюється на матрицю-стовпець і навпаки.

Неважко побачити, що $A_{ij}^T = A_{ji}$.

Наприклад,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

і

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, для отримання транспонованої матриці достатньо кожен рядок вихідної матриці записати у вигляді стовпця результуючої, дотримуючись порядку прямування елементів.

Отже, транспонована матриця — матриця A^T , що виникає з матриці A в результаті унарної операції транспонування: заміни її рядків на стовпчики. Формально, транспонована матриця $A^T = (b_{ij})$ для матриці $A = (a_{ij})$ визначається як

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

У лінійній алгебрі операція транспонування є проміжною дією, яка робить зручніше виконання складніших матричних перетворень, що мають власну логіку.

При аналізі даних операція транспонування застосовується до таблиць з даними, у результаті стовпці таблиці стають рядками, а рядки — стовпцями (рис. 1.1).

Означення. Квадратна матриця M називається *кососиметричною*, якщо $M = -M^T$, де M^T — матриця, транспонована відносно матриці M . Інакше кажучи, це квадратна матриця, у якої

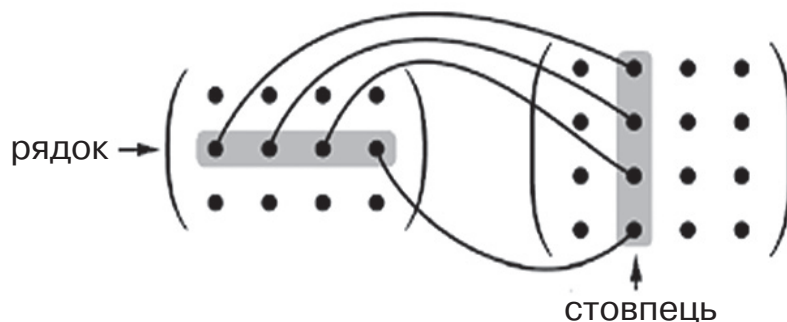


Рис. 1.1.