

МІЖРЕГІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ
INTERREGIONAL ACADEMY OF PERSONNEL MANAGEMENT

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА СУСПІЛЬСТВО

INFORMATION TECHNOLOGY AND SOCIETY

**ВИПУСК 2
ISSUE 2**

2021



**Видавничий дім
«Гельветика»
2021**

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Міжрегіональної Академії управління персоналом
(протокол № 4 від 30 серпня 2021 року)*

Інформаційні технології та суспільство / [головний редактор О. Попов]. – Київ: Міжрегіональна Академія управління персоналом, 2021. – Випуск 2. – 94 с.

Журнал «Інформаційні технології та суспільство» є науковим рецензованим виданням, в якому здійснюється публікація матеріалів науковців різних рівнів у вигляді наукових статей з метою їх поширення як серед вітчизняних дослідників, так і за кордоном.

Редакційна колегія не обов'язково поділяє позицію, висловлену авторами у статтях, та не несе відповідальності за достовірність наведених даних і посилань.

Головний редактор: Попов О. О. – член-кор. НАН України, д-р техн. наук, с.н.с., заступник директора з науково-організаційної роботи, Державна установа «Інститут геохімії навколишнього середовища Національної академії наук України».

Редакційна колегія:

Василенко М. Д. – д-р фіз.-мат. наук, проф., професор кафедри кібербезпеки, Національний університет «Одеська юридична академія»; **Горбов І. В.** – канд. техн. наук, с.н.с., старший науковий співробітник, Інститут проблем реєстрації інформації НАН України; **Дуднік А. С.** – д-р техн. наук, доц., доцент кафедри мережевих та інтернет технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка; **Євсєєв С. П.** – д-р техн. наук, професор кафедри кібербезпеки та інформаційних технологій факультету інформаційних технологій, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця; **Зибін С. В.** – д-р техн. наук, доц., завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення, Національний авіаційний університет; **Кавун С. В.** – д-р екон. наук, канд. техн. наук, проф., завідувач кафедри комп'ютерних інформаційних систем та технологій Інституту комп'ютерно-інформаційних технологій, ПрАТ «ВНЗ «Міжрегіональна Академія управління персоналом»; **Комарова Л. О.** – д-р техн. наук, с.н.с., директор Навчально-наукового інституту інформаційної безпеки та стратегічних комунікацій, Національна академія Служби безпеки України; **Мілов О. В.** – д-р техн. наук, професор кафедри кібербезпеки та інформаційних технологій факультету інформаційних технологій, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця; **Охріменко Т. О.** – канд. техн. наук, старший науковий співробітник науково-дослідної лабораторії протидії кіберзагрозам в авіаційній галузі, Національний авіаційний університет; **Рудніченко М. Д.** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедри інформаційних технологій, Державний університет «Одеська політехніка»; **Фомін О. О.** – д-р техн. наук, доц., професор кафедри комп'ютеризованих систем управління, професор кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, Державний університет «Одеська політехніка»; **Скура-товський Р. В.** – канд. фіз.-мат. наук, доц., доцент кафедри обчислювальної математики та комп'ютерного моделювання, Інститут комп'ютерно-інформаційних технологій, ПрАТ «ВНЗ «Міжрегіональна Академія управління персоналом»; **Супрун О. М.** – канд. фіз.-мат. наук, доц., доцент кафедри програмних систем і технологій факультету інформаційних технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка; **Табунщик Г. В.** – канд. техн. наук, проф., професор кафедри програмних засобів, Національний університет «Запорізька політехніка»; **Хохлячова Ю. С.** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедри безпеки інформаційних технологій, Національний авіаційний університет; **Чолишкіна О. Г.** – канд. техн. наук, доц., директор Інституту комп'ютерно-інформаційних технологій та дизайну, ПрАТ «ВНЗ «Міжрегіональна Академія управління персоналом»; **Юдін О. К.** – д-р техн. наук, проф., директор центру кібербезпеки Навчально-наукового інституту інформаційної безпеки та стратегічних комунікацій, Національна академія Служби безпеки України; **Гонє-єнко Віктор** – dr. sc. ing., проф., проректор з наукової роботи, директор навчальної програми магістратури «Комп'ютерні системи», Університет прикладних наук ISMA (Латвійська Республіка); **Leszczyna Rafal** – dr hab. inż., професор кафедри комп'ютерних наук у менеджменті, Гданський технологічний університет (Республіка Польща).

*Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
«Інформаційні технології та суспільство» Серія KB № 24815-14755P від 27.04.2021 р.*

Усі електронні версії статей журналу оприлюднюються на офіційній сторінці видання
<http://journals.maup.com.ua/index.php/it>

Статті у виданні перевірені на наявність плагіату за допомогою програмного забезпечення
StrikePlagiarism.com від польської компанії Plagiat.pl.

© Міжрегіональна Академія управління персоналом, 2021

© Авторів статей, 2021

***Recommended for publication
by Interregional Academy of Personnel Management
(Minutes No. 4 dated 30.08.2021)***

Information Technology and Society / [chief editor Oleksandr Popov]. – Kyiv: Interregional Academy of Personnel Management, 2021. – Issue 2. – 94 p.

Journal «Information Technology and Society» is a peer-reviewed scientific edition, which publishes materials of scientists of various levels in the form of scientific articles for the purpose of their dissemination both among domestic researchers and abroad.

Editorial board do not necessarily reflect the position expressed by the authors of articles, and are not responsible for the accuracy of the data and references.

Chief editor: Oleksandr Popov – Corresponding Member of NAS of Ukraine, Doctor of Engineering, Senior Research Scientist, Deputy Director for Scientific-Organizational Affairs, SI “Institute of Environmental Geochemistry of the National Academy of Sciences of Ukraine”.

Editorial Board:

Mykola Vasylenko – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor at the Department of Cybersecurity, National University «Odesa Law Academy»; **Ivan Horbov** – PhD in Engineering, Senior Research Associate, Senior Research Fellow, Institute for Information Recording of NAS of Ukraine; **Andrii Dudnik** – Doctor of Engineering, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Networking and Internet Technologies, Taras Shevchenko National University of Kyiv; **Serhii Yevseiev** – Doctor of Engineering, Professor at the Department of Cybersecurity and Information Technologies of the Faculty of Information Technologies, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics; **Serhii Zybin** – Doctor of Engineering, Associate Professor, Head of the Department of Software Engineering, National Aviation University; **Serhii Kavun** – Doctor of Economics, PhD in Engineering, Professor, Head of the Department of Computer Information Systems and Technologies of the Institute of Computer Information Technologies, PJSC «HEI «Interregional Academy of Personnel Management»; **Larysa Komarova** – Doctor of Engineering, Senior Research Scientist, Laureate of State Prize, Director of Educational-Scientific Institute of Information Security and Strategic Communications, National Academy of the Security Service of Ukraine; **Milov Oleksandr** – Doctor of Engineering, Professor at the Department of Cybersecurity and Information Technologies of the Faculty of Information Technologies, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics; **Tetiana Okhrimenko** – PhD in Engineering, Senior Research Scientist at the Scientific Research Laboratory for Countering Aviation Cyberthreats, National Aviation University; **Mykola Rudnichenko** – PhD in Engineering, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Information Technologies, Odessa Polytechnic State University; **Oleksandr Fomin** – Doctor of Engineering, Associate Professor, Professor at the Department of Computerized Control Systems, Professor at the Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Odessa Polytechnic State University; **Ruslan Skuratovskyi** – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Computational Mathematics and Computer Modeling, Institute of Computer Information Technology, PJSC «HEI «Interregional Academy of Personnel Management»; **Olha Suprun** – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Software Systems and Technologies of the Faculty of Information Technologies, Taras Shevchenko National University of Kyiv; **Halyna Tabunshchuk** – PhD in Engineering, Professor, Professor at the Department of Software Tools, “Zaporizhzhia Polytechnic” National university; **Yuliia Khokhlachova** – PhD in Engineering, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Information Technology Security, National Aviation University; **Olha Cholyshkina** – PhD in Engineering, Associate Professor, Director of the Institute of Computer Information Technologies and Design, PJSC «HEI «Interregional Academy of Personnel Management»; **Oleksandr Yudin** – Doctor of Engineering, Professor, Director of the Cybersecurity Center of the Educational-Scientific Institute of Information Security and Strategic Communications, National Academy of the Security Service of Ukraine; **Hopeienko Viktor** – dr. sc. ing., Professor, Vice Rector for Research, Director of the study programme “Computer systems”, ISMA University of Applied Sciences (Republic of Latvia); **Leszczyna Rafal** – dr hab. inż., Profesor, Katedra Informatyki w Zarządzaniu, Politechnika Gdańska (Republic of Poland).

*Print media registration certificate «Information Technology and Society»
series KV No. 24815-14755P dated 27.04.2021*

All electronic versions of articles in the collection are available on the official website edition
<http://journals.maup.com.ua/index.php/it>

The articles were checked for plagiarism using the software
StrikePlagiarism.com developed by the Polish company Plagiat.pl.

© Interregional Academy of Personnel Management, 2021
© Copyright by the contributors, 2021

ЗМІСТ

Андрій ДУДНІК

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПІДВИЩЕННЯ ПРОДУКТИВНОСТІ БЕЗПРОВОДОВИХ МЕРЕЖ
У СКЛАДІ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ СИСТЕМ ВИМІРЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЕЛИЧИН.....6

Валерія КОВАЧ, Володимир КУЦЕНКО, Ірина MARTINIYUK, Олександр КОВАЛЕНКО

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО
АНАЛІЗУ ДАНИХ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ЕКОЛОГІЧНОЇ БЕЗПЕКИ АТМОСФЕРНОГО ПОВІТРЯ.....16

Пилип ПРИСТАВКА, Ольга ЧОЛИШКІНА

ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ЛОКАЛЬНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ,
БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ26

Микола РУДНІЧЕНКО, Сергій ГРИШИН, Денис ШИБАЄВ, Ігор ПЕТРОВ, Максим НОСОВ

ПРОЕКТ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ЗБОРУ, ОБРОБКИ ТА АНАЛІЗУ МЕТЕОДАНИХ.....35

**Микола РУДНІЧЕНКО, Сергій ГРИШИН, Наталя ШИБАЄВА, Володимир ВИЧУЖАНІН,
В'ячеслав РИЧКО**

АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ ТА ЗАСОБІВ РОЗРОБКИ ІНТЕРАКТИВНИХ СИСТЕМ
З ПІДТРИМКОЮ ТЕХНОЛОГІЙ ДОПОВНЕНОЇ РЕАЛЬНОСТІ ДЛЯ СФЕРИ ОСВІТИ43

Микола РУДНІЧЕНКО, Тетяна ОТРАДСЬКА, Денис ШИБАЄВ, Ігор ПЕТРОВ, Микита ПОЛІКАРПОВ

РОЗРОБКА СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
ДЛЯ МЕНЕДЖЕРА З УПРАВЛІННЯ ІТ-ПРОЕКТАМИ51

Ruslan SKURATOVSKIY, Anna BAZARNA

ANALYSIS OF THE MEL SCALE FEATURES USING ELECTROGRAPHY
AND SPEECH SIGNALS BY PARAMETERIZED KNN AND XGBOOST58

Ruslan SKURATOVSKIY

ANALYTICAL OVERVIEW AND SYSTEM ANALYSIS OF ORGANOPHOSPHATES FILTRATION
IN THE AGRICULTURAL SECTOR OF THE EUROPEAN UNION75

Денис ШИБАЄВ, Наталя ШИБАЄВА, Тетяна ОТРАДСЬКА, Микита КУЦ

РОЗРОБКА ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНОЇ СИСТЕМИ
З ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В КРЕДИТНОМУ СКОРИНГУ85

УДК 519.652:519.254 (045)

DOI <https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.2.3>

Пилип ПРИСТАВКА

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, Національний авіаційний університет, вул. Любомира Гузара 1, Київ, Україна, індекс 03058 (chindakor37@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0360-2459>

Ольга ЧОЛИШКІНА

кандидат технічних наук, доцент, директор, Інститут комп'ютерно-інформаційних технологій та дизайну, ПрАТ «ВНЗ «Міжрегіональна Академія управління персоналом», вул. Фрометівська 2, Київ, Україна, індекс 03039 (greenhelga5@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0681-0413>

Рулуп PRYSTAVKA

Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, National Aviation University, 1 Liubomyra Huzara Street, Kyiv, Ukraine, postal code 03058 (chindakor37@gmail.com)

Olha CHOLYSHKINA

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Director, Institute of Computer Information Technology and Design, Interregional Academy of personnel management, 2 Frometivska Street, Kyiv, Ukraine, postal code 03039 (greenhelga5@gmail.com)

Бібліографічний опис статті: Приставка П., Чолишкіна О. Часткові випадки локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому другого та третього порядків. *Інформаційні технології та суспільство*. 2021. Вип. 2. С. 26–33. DOI: <https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.2.3>

Bibliographic description of the article: Prystavka, P., Cholyshkina, O. (2021). Chastkovi wypadky lokalnykh polinomialnykh splainiv, blyzkykh do interpolatsiinykh u serednomu druho ho ta tretoho poriadkiv [Partial cases of local polynomial splines close to interpolations in the middle of the second and third orders]. *Informatsiini tekhnolohii ta suspilstvo – Information technology and society*, 2, 26–33. DOI: <https://doi.org/10.32689/maup.it.2021.2.3>

**ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ЛОКАЛЬНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ,
БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ**

Анотація. Розглянуто задачі цифрової обробки сигналів та послідовностей. Для даного типу задач отримано лінійні оператори, які є частковими випадками локальних поліноміальних сплайнів другого порядку першого та другого ступеня уточнення та третього порядку першого ступеня уточнення, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Отримані в статті формули можуть мати застосування при програмуванні, коли критичним є час обробки великих масивів даних. Також коли є потреба в оптимізації розрахунків в режимі реального часу. В статті наведено приклад застосування при реалізації обчислювальних процедур небінарного subdivision.

Ключові слова: локальні поліноміальні сплайни, subdivision-метод, оптимізація розрахунків.

**PARTIAL CASES OF LOCAL POLYNOMIAL SPLINES CLOSE TO INTERPOLATIONS
IN THE MIDDLE OF THE SECOND AND THIRD ORDERS**

Abstract. The problems of digital signal processing and sequences are considered. For this type of problems, linear operators are obtained, which are partial cases of local polynomial splines of the second order of the first and second degree of refinement and the third order of the first degree of refinement, which are close to interpolation on average. The formulas obtained in the paper can be used in programming when the processing time of large data sets is critical. Also when there is a need to optimize calculations in real time. The paper gives an example of the application of non-binary subdivision in the implementation of computational procedures.

Key words: local polynomial splines, subdivision method, calculation optimization.

Постановка проблеми. На сьогодні задачі обробки цифрових сигналів, зображень та відео характеризуються, в першу чергу, великим обсягом даних, що за вимогою мають оброблятися в режимі реального часу. Найвищу швидкість серед методів, що забезпечують операції фільтрації, масштабування, стиснення та які реалізуються при автоматизації розрахунків, показують ті, в основу яких покладено використання лінійних операторів, як таких, що мають найменшу обчислювальну складність. По суті застосування таких операторів являє собою дискретну згортку цифрової послідовності з симетричною або несиметричною маскою, коефіцієнти якої часто отримані, як частковий випадок деякого неперервного наближення. Наприклад, часткові випадки гаусіана та лапласіана використовують в задачі субполосної фільтрації, відповідно, як низько- та високочастотні фільтри [1].

Зростання обсягів інформації при обробці цифрових сигналів характеризується не просто формальним збільшенням кількості даних, а ще й зміною їх властивостей. Зокрема, при обробці цифрових фотографій спостерігається тенденція до збільшення розрішення систем фіксації, що може вимагати збільшення ширини масок операторів згортки. Тож актуальним є дослідження методів апроксимації, що мають високі апроксимативні властивості та низьку обчислювальну складність водночас, задля отримання на їх основі нових лінійних операторів для цифрової обробки сигналів.

Аналіз досліджень та постановка задачі. Однією із поширених задач при обробці одновимірних цифрових послідовностей є кратне або некрратне їх масштабування. Дана операція поширена при стисненні сигналів, виділення інформативних складових або при дослідженні локальних особливостей. Варто окремо звернути увагу на дві близькі, але все ж таки різні за суттю області обробки, що базуються з одного боку на методах кратного масштабування аналізу (КМА) [2], а з другого – *subdivision*-методи [3]. При багатьох точках дотику цих двох обчислювальних технологій можливим є відзначити, що в більшості випадків процедури КМА базуються на операторах, що згладжують, а процедури *subdivision* – на операторах, що близькі до інтерполяційних.

Якщо говорити про наближення, близькі до інтерполяційних, то з точки зору якості неперервних апроксимацій функцій, заданих послідовностями відліків у вузлових точках, з урахуванням вимоги низької обчислювальної складності відповідних процедур, позиції лідера займають методи, засновані на використанні лінійних комбінацій *B*-сплайнів [4–8]. В роботі [9] обґрунтовано лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому в якості моделі цифрових сигналів з кінцевою енергією, показано можливість їх реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових сигналів, в тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Вперше такі сплайни на основі *B*-сплайнів другого порядку були введені в роботах А.О. Лигуна та В.В. Кармазіної [10]. Обчислювальний аспект їх застосування в задачі бінарного *subdivision* подано в роботах [8; 11]. Частковий випадок прикладу застосування уточнюючого локального сплайну на основі *B*-сплайнів другого порядку в задачі не бінарного *subdivision* наведено в роботі [12].

Поставимо за мету даної роботи отримати часткові випадки локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів другого та третього порядків, що можуть мати застосування при розробці автоматизованих систем обробки цифрових сигналів та послідовностей.

Виклад основного матеріалу. Нехай з кроком $h > 0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h: t_i = ih, i \in \mathbb{Z}$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)$, визначеної на $R_1(-\infty; \infty)$. Будемо вважати, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла

$$\bar{p}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t) dt,$$

при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах будемо визначати

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, i \in \mathbb{Z},$$

де ε_i – похибка.

Згідно роботи [7] уточнюючі сплайни на основі *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, що найчастіше мають використання в практичній діяльності, такі:

$$S_{2,1}(p, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(p_i - \frac{1}{6} \Delta^2 p_i \right) B_{2,h}(t - (i + 0,5)h),$$

$$S_{2,2}(p, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(p_i - \frac{1}{6} \Delta^2 p_i + \frac{1}{36} \Delta^4 p_i \right) B_{2,h}(t - (i + 0,5)h),$$

$$S_{3,1}(p, t) = \sum_{i \in Z} \left(p_i - \frac{5}{24} \Delta^2 p_i \right) B_{3,h}(t - ih),$$

де

$$\Delta^{2u} p_i = \Delta^{2u-2} p_{i+1} - 2\Delta^{2u-2} p_i + \Delta^{2u-2} p_{i-1}, \quad u = 1, 2, \dots,$$

$B_{r,h}(t)$, $r = 2, 3, 4$ – В-сплайн, що з точністю до аргументу визначається так:

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2/4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t \in [h/2; 3h/2]; \end{cases}$$

$$B_{3,h}(t) = \frac{1}{48} \begin{cases} 0, & t \notin [-2h; 2h], \\ (4+2t/h)^3, & t \in [-2h; -h], \\ -3(2t/h)^3 - 12(2t/h)^2 + 32, & t \in [-h; 0], \\ 3(2t/h)^3 - 12(2t/h)^2 + 32, & t \in [0; h], \\ (4-2t/h)^3, & t \in [h; 2h]. \end{cases}$$

Наведені сплайни мають високі апроксимативні властивості. Зокрема щодо норм сплайн-операторів справедливий наступний твердження [7]:

$$\|S_{2,1}(p, t)\| = \frac{4}{3} \|p(t)\|, \quad \|S_{2,2}(p, t)\| = \frac{3}{2} \|p(t)\|, \quad \|S_{3,1}(p, t)\| = \frac{41}{32} \|p(t)\|,$$

де

$$\|S_{r,u}(p, t)\| = \sup_{|\varepsilon_i|} \max_t |S_{r,u}(\varepsilon, t)|,$$

$$|\varepsilon_i| < \varepsilon, \quad i \in Z.$$

Зауважимо, що значення норми оператора $S_{r,u}(p, t)$ – це величина, яка характеризує в скільки разів може зрости похибка при відтворенні функції за допомогою сплайну, якщо значення p_i задані з похибкою.

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,u}(\bar{p}, t)$, $r = 2, 3$, $u = 1, 2$ свідчать наступні оцінки [7].

При $h \rightarrow 0$ для довільної функції $p(t) \in C^3$ буде вірно наступне

$$\|p(t) - S_{2,u}(\bar{p}, t)\| = \frac{h^3}{12\sqrt{3}} \|p^{(3)}(t)\| + o(h^3), \quad u = 1, 2,$$

і для довільної функції $p(t) \in C^4$ справедливо

$$\|p(t) - S_{3,1}(\bar{p}, t)\| = \frac{1221h^4}{2880} \|p^{(4)}(t)\| + o(h^4),$$

Подання зазначених сплайнів у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів не зовсім зручне для реалізації в обчислювальній середовищі, тож якщо ввести заміну

$$x = \frac{2}{h}(t - (i + 0,5)h), \quad |x| \leq 1, \quad \text{при } r = 2$$

та

$$x = \frac{2}{h}(t - ih), \quad |x| \leq 1, \quad \text{при } r = 3,$$

то сплайни $S_{r,u}(p, t)$, $r = 2, 3$, $u = 1, 2$ можна навести в розгорнутому представленні:

$$S_{2,1}(p, t) = \frac{1}{48} \left(-(1-x)^2 p_{i-2} + (2-16x+10x^2) p_{i-1} + (46-18x^2) p_i + \right. \\ \left. + (2+16x+10x^2) p_{i+1} - (1+x)^2 p_{i+2} \right), \quad (1)$$

$$S_{2,2}(p,t) = \frac{1}{288} \left((1-x)^2 p_{i-3} + (-4+20x-12x^2) p_{i-2} + \right. \\ \left. + (-5-106x+75x^2) p_{i-1} + (304-128x^2) p_i + (-5+106x+75x^2) p_{i+1} + \right. \\ \left. + (-4-20x-12x^2) p_{i+2} + (1+x)^2 p_{i+3} \right), \quad (2)$$

$$S_{3,1}(p,t) = \frac{1}{1152} \left(-5(1-x)^3 p_{i-2} + (-81-27x+117x^2-49x^3) p_{i-1} + \right. \\ \left. + (662-570x-102x^2+122x^3) p_i + (662+570x-102x^2-122x^3) p_{i+1} + \right. \\ \left. + (-81+27x+117x^2+49x^3) p_{i+2} - 5(1+x)^3 p_{i+3} \right). \quad (3)$$

На основі виразів (1)-(3) нескладно забезпечити зміну кількості відліків в послідовності $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ в довільну кількість раз (необов'язково у цілочисельну). Але, якщо зміна масштабу послідовності здійснюється на певний наперед відомий коефіцієнт, то в цьому разі для апроксимацій, що мають явний вигляд як наведені вище, можна отримати обчислювальні процедури з меншою обчислювальною складністю, як часткові випадки (*subdivision*-процедури).

Введемо позначення

$$\gamma_{(x)}^{(r,k)}$$

– вектор стовпець координати якого після операції дискретної згортки з послідовністю відліків $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, функції $p(t)$ надають лінійний функціонал $S_{r,k}^{(x)}$, що є частковим випадком сплайнів (1)-(4) в точці x , тобто:

$$S_{r,k}^{(x)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{(x)}^{(r,k)} \cdot p_i.$$

Нехай для визначеності x може набувати значення із множини

$$\left\{ -1, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1 \right\}. \quad (4)$$

Тоді для сплайну $S_{2,1}(p,t)$ має місце:

$$S_{2,1}^{(x)} = \sum_{j=i-2}^{i+2} \gamma_{(x)}^{(2,1)} \cdot p_j,$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{(-1)}^{(2,1)} &= \frac{1}{12} (-1 \ 7 \ 7 \ -1 \ 0)^T; \\ \gamma_{(-\frac{4}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{1200} (-81 \ 530 \ 862 \ -110 \ -1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{3}{4})}^{(2,1)} &= \frac{1}{768} (-49 \ 314 \ 574 \ -70 \ -1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(2,1)} &= \frac{1}{432} (-25 \ 154 \ 342 \ -38 \ -1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{2})}^{(2,1)} &= \frac{1}{300} (-16 \ 95 \ 247 \ -25 \ -1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{192} (-9 \ 50 \ 166 \ -14 \ -1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{1200} (-49 \ 250 \ 1078 \ -70 \ -9)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(2,1)} &= \frac{1}{108} (-4 \ 19 \ 99 \ -5 \ -1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(2,1)} &= \frac{1}{768} (-25 \ 106 \ 718 \ -22 \ -9)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{300} (-9 \ 35 \ 283 \ -5 \ -4)^T; \\ \gamma_{(0)}^{(2,1)} &= \frac{1}{48} (-1 \ 2 \ 46 \ 2 \ -1)^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{(\frac{1}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{300}(-4 \quad -5 \quad 283 \quad 35 \quad -9)^T; \\
 \gamma_{(\frac{1}{4})}^{(2,1)} &= \frac{1}{768}(-9 \quad -22 \quad 718 \quad 106 \quad -25)^T; \\
 \gamma_{(\frac{1}{3})}^{(2,1)} &= \frac{1}{108}(-1 \quad -5 \quad 99 \quad 19 \quad -4)^T; \\
 \gamma_{(\frac{2}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{1200}(-9 \quad -70 \quad 1078 \quad 250 \quad -49)^T; \\
 \gamma_{(\frac{1}{2})}^{(2,1)} &= \frac{1}{192}(-1 \quad -14 \quad 166 \quad 50 \quad -9)^T; \\
 \gamma_{(\frac{2}{3})}^{(2,1)} &= \frac{1}{300}(-1 \quad 25 \quad 247 \quad 95 \quad -16)^T; \\
 \gamma_{(\frac{2}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{432}(-1 \quad -38 \quad 342 \quad 154 \quad -25)^T; \\
 \gamma_{(\frac{3}{4})}^{(2,1)} &= \frac{1}{768}(-1 \quad -70 \quad 574 \quad 314 \quad -49)^T; \\
 \gamma_{(\frac{4}{5})}^{(2,1)} &= \frac{1}{1200}(-1 \quad -110 \quad 862 \quad 530 \quad -81)^T; \\
 \gamma_{(1)}^{(2,1)} &= \frac{1}{12}(0 \quad -1 \quad 7 \quad 7 \quad -1)^T.
 \end{aligned}$$

Для сплайну $S_{2,2}(p, t)$ виконється:

$$S_{2,2}^{(x)} = \sum_{j=i-3}^{i+3} \gamma_{(x)}^{(2,2)} \cdot p_j,$$

де

$$\begin{aligned}
 \gamma_{(-1)}^{(2,2)} &= \frac{1}{72}(1 \quad -9 \quad 44 \quad 44 \quad -9 \quad 1 \quad 0)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{4}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{7200}(81 \quad -692 \quad 3195 \quad 5552 \quad -1045 \quad 108 \quad 1)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{3}{4})}^{(2,2)} &= \frac{1}{4608}(49 \quad -412 \quad 1867 \quad 3712 \quad -677 \quad 68 \quad 1)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(2,2)} &= \frac{1}{2592}(25 \quad -204 \quad 891 \quad 2224 \quad -381 \quad 36 \quad 1)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{1800}(16 \quad -127 \quad 535 \quad 1612 \quad -260 \quad 23 \quad 1)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{1}{2})}^{(2,2)} &= \frac{1}{1152}(9 \quad -68 \quad 267 \quad 1088 \quad -157 \quad 12 \quad 1)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{2}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{7200}(49 \quad -348 \quad 1235 \quad 7088 \quad -885 \quad 52 \quad 9)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{1}{3})}^{(2,2)} &= \frac{1}{648}(4 \quad -27 \quad 87 \quad 652 \quad -72 \quad 3 \quad 1)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(2,2)} &= \frac{1}{4608}(25 \quad -156 \quad 419 \quad 4736 \quad -429 \quad 4 \quad 9)^T; \\
 \gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{1800}(9 \quad -53 \quad 120 \quad 1868 \quad -145 \quad -3 \quad 4)^T; \\
 \gamma_{(0)}^{(2,2)} &= \frac{1}{288}(1 \quad -4 \quad -5 \quad 304 \quad -5 \quad -4 \quad 1)^T; \\
 \gamma_{(\frac{1}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{1800}(4 \quad -3 \quad -145 \quad 1868 \quad 120 \quad -53 \quad 9)^T; \\
 \gamma_{(\frac{1}{4})}^{(2,2)} &= \frac{1}{4608}(9 \quad 4 \quad -429 \quad 4736 \quad 419 \quad -156 \quad 25)^T; \\
 \gamma_{(\frac{1}{3})}^{(2,2)} &= \frac{1}{648}(1 \quad 3 \quad -72 \quad 652 \quad 87 \quad -27 \quad 4)^T;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{(-\frac{2}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{7200} (9 \ 52 \ -885 \ 7088 \ 1235 \ -348 \ 49)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{2})}^{(2,2)} &= \frac{1}{1152} (1 \ 12 \ -157 \ 1088 \ 267 \ -68 \ 9)^T; \\ \gamma_{(\frac{2}{3})}^{(2,2)} &= \frac{1}{1800} (1 \ 23 \ -260 \ 1612 \ 535 \ -127 \ 16)^T; \\ \gamma_{(\frac{2}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{2592} (1 \ 36 \ -381 \ 2224 \ 891 \ -204 \ 25)^T; \\ \gamma_{(\frac{3}{4})}^{(2,2)} &= \frac{1}{4608} (1 \ 68 \ -677 \ 3712 \ 1867 \ -412 \ 49)^T; \\ \gamma_{(\frac{4}{5})}^{(2,2)} &= \frac{1}{7200} (1 \ 108 \ -1045 \ 5552 \ 3195 \ -692 \ 81)^T; \\ \gamma_{(1)}^{(2,2)} &= \frac{1}{72} (0 \ 1 \ -9 \ 44 \ 44 \ 9 \ 1)^T.\end{aligned}$$

Для сплайну $S_{3,1}(p, t)$ буде:

$$S_{3,1}^{(x)} = \sum_{j=i-2}^{i+3} \gamma_{(x)}^{(3,1)} \cdot p_j,$$

де

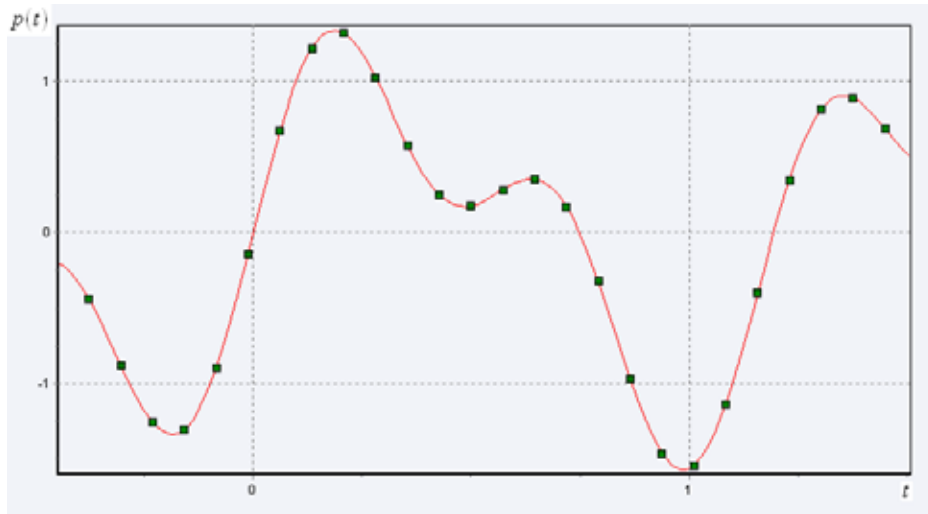
$$\begin{aligned}\gamma_{(-1)}^{(3,1)} &= \frac{1}{144} (-5 \ 14 \ 126 \ 14 \ -5 \ 0)^T; \\ \gamma_{(-\frac{4}{5})}^{(3,1)} &= \frac{1}{144000} (-3645 \ 5071 \ 123782 \ 25398 \ -6601 \ -5)^T; \\ \gamma_{(-\frac{3}{4})}^{(3,1)} &= \frac{1}{73728} (-1715 \ 1647 \ 62762 \ 14630 \ -3591 \ -5)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(3,1)} &= \frac{1}{31104} (-625 \ 95 \ 25934 \ 7366 \ -1661 \ -5)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{5})}^{(3,1)} &= \frac{1}{18000} (-320 \ -189 \ 14702 \ 4838 \ -1026 \ -5)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{2})}^{(3,1)} &= \frac{1}{9216} (-135 \ -257 \ 7250 \ 2934 \ -571 \ -5)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{5})}^{(3,1)} &= \frac{1}{144000} (-1715 \ -6043 \ 108234 \ 53186 \ -9527 \ -135)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{3})}^{(3,1)} &= \frac{1}{3888} (-40 \ -193 \ 2822 \ 1570 \ -266 \ -5)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(3,1)} &= \frac{1}{73728} (-625 \ -4235 \ 50958 \ 32962 \ -5197 \ -135)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(3,1)} &= \frac{1}{18000} (-135 \ -1102 \ 12046 \ 8514 \ -1283 \ -40)^T; \\ \gamma_{(0)}^{(3,1)} &= \frac{1}{1152} (-5 \ -81 \ 662 \ 662 \ -81 \ -5)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{5})}^{(3,1)} &= \frac{1}{18000} (-40 \ -1283 \ 8514 \ 12046 \ -1102 \ -135)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{4})}^{(3,1)} &= \frac{1}{73728} (-135 \ -5197 \ 32962 \ 50958 \ -4235 \ -625)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{3})}^{(3,1)} &= \frac{1}{3888} (-5 \ -266 \ 1570 \ 2822 \ -193 \ -40)^T; \\ \gamma_{(\frac{2}{5})}^{(3,1)} &= \frac{1}{144000} (-135 \ -9527 \ 53186 \ 108234 \ -6043 \ -1715)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{2})}^{(3,1)} &= \frac{1}{9216} (-5 \ -571 \ 2934 \ 7250 \ -257 \ -135)^T; \\ \gamma_{(\frac{2}{5})}^{(3,1)} &= \frac{1}{18000} (-5 \ -1026 \ 4838 \ 14702 \ -189 \ -320)^T;\end{aligned}$$

$$\gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(3,1)} = \frac{1}{31104}(-5 \quad -1661 \quad 7366 \quad 25934 \quad 95 \quad -625)^T;$$

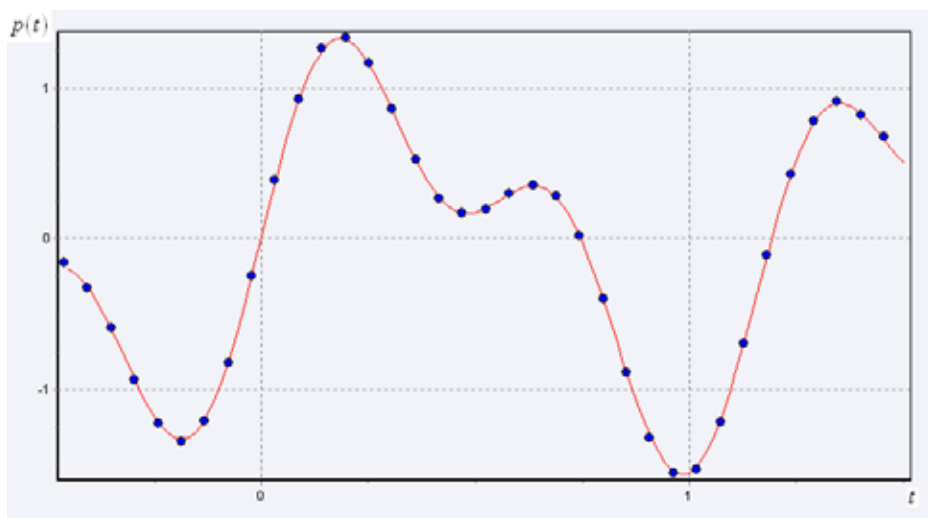
$$\gamma_{(\frac{3}{4})}^{(3,1)} = \frac{1}{73728}(-5 \quad -3591 \quad 14630 \quad 62762 \quad 1647 \quad -1715)^T;$$

$$\gamma_{(\frac{5}{8})}^{(3,1)} = \frac{1}{144000}(-5 \quad -6601 \quad 25398 \quad 123782 \quad 5071 \quad -3645)^T;$$

$$\gamma_{(1)}^{(3,1)} = \frac{1}{144}(0 \quad -5 \quad 14 \quad 126 \quad 14 \quad -5)^T.$$



а)



б)

Рис. 1. Небінарний subdivision «3 в 4» на основі сплайну (1):

а) функція $p(t) = \sin(5t) + 0.6\sin(11t)$, $t \in [-0.45; 1.52]$ та її початкові відліки;

б) результат subdivision після однієї ітерації.

На графіках (рис. 1) подано приклад небінарного subdivision при проектуванні кожних 2-х послідовних відліків функції $p(t) = \sin(5t) + 0.6\sin(11t)$, $t \in [-0.45; 1.52]$ (суцільна крива) в 3-и відліки. В якості лінійних операторів масштабування брались часткові випадки сплайну (1) відповідно в точках $x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = \frac{3}{4}$ з множини (5), котрим, відповідають маски $\gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(2,1)}$, $\gamma_{(-\frac{3}{4})}^{(2,1)}$, $\gamma_{(\frac{3}{4})}^{(2,1)}$,

$\gamma_{\frac{1}{4}}^{(2,1)}$. Як видно з графіків, при низькій обчислювальній складності, що надають часткові випадки сплайну (1), одержано наближення прийнятно високої якості апроксимації.

Висновки. В роботі отримано понад п'ятдесят часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів другого порядку першого та другого ступеня уточнення та третього порядку першого ступеня уточнення, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Нові лінійні оператори можуть мати використання при розробці програмного забезпечення опрацювання числових послідовностей, цифрових сигналів та зображень, що функціонує у режимі реального часу. Швидкодія розрахунків забезпечується низькою обчислювальною складністю запропонованих лінійних операторів.

Подальші дослідження можуть полягати в отриманні нових операторів обробки дво- та тривимірних послідовностей на основі наведених в роботі функціоналів.

Список використаних джерел:

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М. : Мир, 2001. 604 с.
2. Holschneider M. Wavelets. An analysis Tool. Oxford : Oxford University Press, 1995.
3. Andersson L.-E., Stewart N. Introduction to the mathematics of subdivision surfaces. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 356 p.
4. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и связь, 1985. 303 с.
5. Чуи Ч. Введение в вэйвлеты. М. : Мир, 2001. 412 с.
6. Unser M. Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*. 1999. Vol. 16. № 6. P. 22–38.
7. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. К. : ІМ НАН України, 1996. 358 с.
8. Приставка П.О. Поліномаїльні сплайни при обробці даних. Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. 236 с.
9. Приставка П.О. Лінійні комбінації В-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій* : зб. наук. праць. Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту. 2011. Т. 15. С. 4–17.
10. Лигун А.А., Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка. Днепропетровск : Днепропетровский индустр. ин-т, 1989. 30 с.
11. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій*. 2003. Т. 7. С. 39–53.
12. Приставка П.О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів. *Вісн. НАУ*. 2008. № 3. С. 85–89.

References:

1. Rogers, D., Adams, J. (2001). *Matematicheskie osnovy mashinnoy grafiki [Mathematical foundations of computer graphics]*. Moscow: Mir [in Russian].
2. Holschneider, M. Wavelets (1995) *An analysis Tool*. Oxford: Oxford University Press.
3. Andersson, L.-E., Stewart, N. (2010). *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
4. De Bohr, K. (1985). *Prakticheskoe rukovodstvo po splajnam [A Practical Guide to Splines]*. Moscow: Radio and communication [in Russian].
5. Chui, Ch. (2001). *Vvedenie v vehvlety [An Introduction to Wavelets]*. Moscow: Mir [in Russian].
6. Unser, M. (1999). Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no 6, pp. 22–38.
7. Ligon, A.A., Shumeiko, A.A. (1996). *Asimptoticheskie metody vosstanovleniya krivyykh [Asymptotic methods for restoring curves]*. Kyiv: IM of the NAS of Ukraine [in Russian].
8. Prystavka, P.O. (2004). *Polinomialni splainy pry obrobsi danykh [Polynomial splines in data processing]*. Dnipro: Dnipropetrovsk University Publishing House [in Ukrainian].
9. Prystavka, P.O. (2011). Liniini kombinatsii V-splainiv, blyzki do interpolatsiinykh u serednomu, v zadachi modeliuvannia analohovykh syhnaliv [Linear combinations of B-splines, close to interpolation on average, in the problem of modeling analog signals]. *Aktualni problemy avtomatyzatsii ta informatsiinykh tekhnolohii – Actual problems of automation and information technology*, vol. 15, pp. 4–17 [in Ukrainian].
10. Ligon, A.A., Karmazina, V.V. (1989). O vosstanovlenii ehmpiricheskoy funktsii plotnosti-raspredeleniya s pomoshchyu gistosplajnov vtorogo poryadka [Reconstruction of the empirical distribution density function using second-order histosplines]. Dneprodzerzhinsk: Dneprodzerzhinsk Industrial Institute in Russian].
11. Prystavka, P.O. (2003). Polinomialni splainy v zadachakh binarnoho popovnennia [Polynomial splines in binary improvement problems]. *Aktualni problemy avtomatyzatsii ta informatsiinykh tekhnolohii – Actual problems of automation and information technology*, vol. 7, pp. 39–53 [in Ukrainian].
12. Prystavka, P.O. (2008). Nebinarne popovnennia poslidovnostei vidlikiv hladkykh funktsii liniinymy operatoramy na osnovi polinomialnykh splainiv [Non-binary reimplementation of poslidities in smooth functions by line operators based on polynomial splines]. *Visnyk NAU – Proceedings of the National Aviation University*, no 3, pp. 85–89 [in Ukrainian].